

**GROUPES QUANTIQUES ET INVARIANTS QUANTIQUES**

Dans les années 1980 ont été définis de nouveaux invariants des noeuds et 3-variétés, appelés invariants quantiques. Le premier (et le plus simple) des invariants quantiques des noeuds fut défini par Jones (cela lui valut la médaille Fields en 1990). Rappelons qu'un noeud est une courbe fermée de l'espace  $\mathbb{R}^3$  sans point d'intersection. En d'autres termes, un noeud peut être vu comme une ficelle éventuellement enchevêtrée dont les extrémités ont été recollées. Tout noeud peut être représenté par un diagramme planaire. Par exemple :



Jones a associé à tout noeud  $K$  un polynôme de Laurent  $J_K(q)$ . Par exemple,

$$J_O(q) = 1, \quad J_T(q) = -q^{-4} + q^{-3} + q^{-1}, \quad J_H(q) = q^2 + q^{-2} - q - q^{-1} + 1.$$

Le polynôme de Jones est un invariant du noeud  $K$ , c'est-à-dire qu'il ne change pas lorsque l'on déforme  $K$  continûment (i.e., via des déplacements, étirements ou rétrécissements de la ficelle). Les noeuds trivial, trèfle et huit sont donc bien différents (car leurs polynômes de Jones sont distincts).

Outre leurs applications en topologie, un des intérêts majeurs des invariants quantiques est qu'ils sont reliés à de nombreux domaines des mathématiques, notamment la théorie des représentations des groupes quantiques. Les groupes quantiques ont été introduits dans les années 1980 par Drinfeld (également médaille Fields en 1990) et Jimbo pour résoudre l'équation de Yang-Baxter, équation qui trouve son origine en mécanique statistique et est étroitement liée à la théorie des noeuds et des groupes de tresses.

Le but du cours est d'étudier le groupe quantique  $U_q(\mathfrak{sl}_2)$  et ses liens avec les invariants quantiques des noeuds et 3-variétés.

**Plan du cours:**
**§1. Le polynôme de Jones**

- a. Noeuds et entrelacs
- b. Construction élémentaire du polynôme de Jones
- c. Exemples et propriétés

**§2. Groupes quantiques**

- a. Algèbres de Hopf
- b. Algèbres par générateurs et relations
- c. Le groupe quantique  $U_q(\mathfrak{sl}_2)$

**§3. Représentations**

- a. L'équation de Yang-Baxter
- b. Catégories monoidales tressées
- c. Représentations du groupe quantique  $U_q(\mathfrak{sl}_2)$

**§4. Groupes quantiques et invariants quantiques**

- a. Le foncteur de Reshetikhin-Turaev
- b. Le polynôme de Jones via  $U_q(\mathfrak{sl}_2)$
- c. Invariants quantiques des 3-variétés

## **Bibliographie :**

1. Kassel, C., *Quantum groups*, Graduate Texts in Math., 155. Springer-Verlag, New York, 1995.
2. Kassel, C., Rosso, M., Turaev, V., *Quantum groups and knot invariants*, Panoramas et Synthèses vol. 5, Société Mathématique de France, Paris, 1997.
3. Lickorish, R., *An Introduction to Knot Theory*, Graduate Texts in Math., 175. Springer-Verlag, New York, 1997.
4. Turaev, V., *Quantum invariants of knots and 3-manifolds*, Second revised edition, de Gruyter Studies in Mathematics, 18. Walter de Gruyter, Berlin, 2010.

Cours proposé par *Alexis Virelizier* et *Huafeng Zhang*.