Université Lille1
Sciences et Technologies

Master 1 - M416 - Topologie

2013/14 - Devoir surveillé n°1

Durée : 2h00

Exercice 1. (Vrai ou faux)
Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses.
Justifier la réponse par une courte preuve ou un contre-exemple.

a. Toute injection continue $i\colon X \to Y$, où X et Y sont des espaces topologiques compacts, induit un homéomorphisme entre X et son image $i(X)$.
b. Il existe deux applications continues d'un même espace vers $\mathbb{R}^2$ qui ne sont pas homotopes.
c. Il existe deux applications continues d'un même espace vers $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ qui ne sont pas homotopes.
d. Soient X un ensemble et $x_0 \in X$. On munit X de la topologie discrète. Alors $\pi_1(X, x_0)$ est trivial.
e. Soient X un ensemble et $x_0 \in X$. On munit X de la topologie grossière. Alors $\pi_1(X, x_0)$ est trivial.

Exercice 2. (Projection stéréographique)
Pour $n \geq 1$, on considère la sphère

$$S^n = \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \,\big|\, x_1^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 1\}$$

et son pole nord $N = (0, \ldots, 0, 1)$. La projection stéréographique $p\colon S^n \setminus \{N\} \to \mathbb{R}^n$ associe à tout $x \in S^n \setminus \{N\}$ l'unique point $p(x) = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que les points N, x, et $(y_1, \ldots, y_n, 0)$ soient alignés.

a. Calculer $p(x)$ pour tout $x = (x_1, \ldots, x_{n+1}) \in S^n \setminus \{N\}$.
On fera un dessin illustrant la situation dans le cas $n = 2$.
b. Montrer que p est un homéomorphisme.

Exercice 3. (Cône d'une espace topologique)
Le cône d'un espace topologique X est l'espace quotient $C(X) = X \times [0, 1]/X \times \{0\}$.

a. Montrer que $C(S^{n-1}) \cong B^n$ pour tout $n \geq 1$, où

$$S^{n-1} = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \,\big|\, x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1\} \quad \text{et} \quad B^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \,\big|\, x_1^2 + \cdots + x_n^2 \leq 1\}.$$

[*Indication :* on pourra utiliser l'application $(x, t) \in S^{n-1} \times [0, 1] \mapsto tx \in B^n$ pour construire un homéomorphisme de $C(S^{n-1})$ vers B^n.]
b. Montrer que le cône d'un espace topologique est contractile.

Exercice 4. (Homotopies vs chemins)
Soient X et Y deux espaces topologiques. On munit l'ensemble $\mathcal{C}(X, Y)$ des applications continues de X vers Y de la topologie dite *compact-ouvert*, c'est-à-dire engendrée par les ensembles

$$W(K, U) = \{f \in \mathcal{C}(X, Y) \mid f(K) \subset U\}$$

où K est un compact de X et U un ouvert de Y.
Le but de l'exercice est de montrer que si X est localement compact, alors l'ensemble des classes d'homotopie d'applications de X dans Y est l'ensemble des composantes par arcs de $\mathcal{C}(X, Y)$.

a. Soit $H\colon X \times [0, 1] \to Y$ une application continue.
Montrer que l'application $\alpha\colon [0, 1] \to \mathcal{C}(X, Y)$, définie par $\alpha(t) = H(\cdot, t)$, est continue.
b. On suppose que X est localement compact, c'est-à-dire que tout point de X admet un voisinage compact. Soit $\alpha\colon [0, 1] \to \mathcal{C}(X, Y)$ une application continue.
Montrer que l'application $H\colon X \times [0, 1] \to Y$, définie par $H(x, t) = \alpha(t)(x)$, est continue.
c. Conclure.