Université Lille1 Sciences et Technologies

2013/14 - Master 1 - M416 - Topologie

TD3 - Topologie quotient

Exercice 1.

a. Les espaces $\mathrm{O}(n,\mathbb{R})$, $\mathrm{SO}(n,\mathbb{R})$, $\mathrm{U}(n,\mathbb{C})$, $\mathrm{SU}(n,\mathbb{C})$ sont-ils compacts ?

b. Les espaces $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$, $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ sont-ils compacts ?

Exercice 2. (Actions de groupes)

On rappelle qu'un groupe G qui agit sur un ensemble X définit sur X une relation d'équivalence, l'ensemble quotient (i.e., l'ensemble des orbites de l'action) étant noté X/G. En particulier, lorsque X est un espace topologique, on munit X/G de la topologie quotient.

⚠ Lorsque $G \subset X$, on ne confondra pas l'espace X/G ainsi défini avec l'espace obtenu en identifiant G à un point (également noté X/G, voir l'exercice 4).

a. Montrer que $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ n'est pas séparé où $\mathbb{Q}$ agit sur $\mathbb{R}$ par translation.

b. Montrer que
$$\mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong S^1,$$
où $\mathbb{Z}$ agit sur $\mathbb{R}$ par translation.

c. Montrer que
$$S^n/\mathbb{Z}_2 \cong \mathbb{RP}^n,$$
où $\mathbb{Z}_2 = \{1,-1\}$ agit sur $S^n = \{(x_1,\dots,x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_1^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 1\}$ par multiplication.

d. Montrer que
$$S^{2n+1}/S^1 \cong \mathbb{CP}^n,$$
où $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ agit sur $S^{2n+1} = \{(z_1,\dots,z_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1} \mid |z_1|^2 + \cdots + |z_{n+1}|^2 = 1\}$ par multiplication. Pour $n = 1$, on obtient donc $S^3/S^1 \cong S^2$ (puisque $\mathbb{CP}^1 \cong S^2$).

Exercice 3. (Recollement)

On rappelle que si X, Y sont des espaces topologiques, A est une partie de Y, et $f\colon A \to X$ est une application continue, alors le *recollement de Y à X le long de f*, noté $Y \cup_f X$, désigne l'espace quotient $Y \sqcup X/\mathcal{R}$ muni de la topologie quotient, où $\mathcal{R}$ est la relation d'équivalence sur l'union disjointe $Y \sqcup X$ engendrée par $a \sim f(a)$ pour tout $a \in A$.

a. Décrire les classes d'équivalence de $\mathcal{R}$.

b. Notons $i\colon A \to Y$ l'application d'inclusion, $g\colon Y \to Y \cup_f X$ et $j\colon X \to Y \cup_f X$ les applications induites par les inclusions $Y \to Y \sqcup X$ et $X \to Y \sqcup X$. Vérifier que $gi = jf$ et montrer que l'espace topologique $Y \cup_f X$ satisfait la propriété suivante : tout diagramme commutatif de la forme

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] \arrow[dr, phantom, "(*)"] & X \arrow[d, dotted, "j"] \arrow[ddr, bend left, "v"] & \\
Y \arrow[r, dotted, "g"'] \arrow[drr, bend right, "u"'] & Y \cup_f X \arrow[dr, dotted, "w"] & \\
& & Z
\end{tikzcd}$$

possède un unique morphisme pointillé $w\colon Y \cup_f X \to Z$ qui le complète, c'est-à-dire, pour tout espace topologique Z et toutes applications continues $u\colon Y \to Z$, $v\colon X \to Z$ telles que $ui = vf$, il existe une unique application continue $w\colon Y \cup_f X \to Z$ telle que $u = wg$ et $v = wj$. On dit aussi que (*) est un *carré cocartésien*.

c. Montrer que le fait que (*) soit un carré cocartésien caractérise $Y \cup_f X$ à homéomorphisme (unique) près. On dit que cette propriété est alors *universelle*.

Exercice 4. (Identification d'une partie à un point)
On rappelle que si A est une partie d'un espace topologique Y, alors l'espace obtenu en *indentifiant A à un point*, noté Y/A, désigne l'espace quotient $Y/\mathcal{R}$ muni de la topologie quotient, où $\mathcal{R}$ est la relation d'équivalence sur Y dont les classes d'équivalence sont : A et $\{y\}$ pour $y \in Y \setminus A$.
a. Vérifier que l'espace obtenu en identifiant une partie à un point est un cas particulier de recollement.
b. Expliciter la propriété universelle de Y/A.

Exercice 5.
Reconnaître l'espace $]-\infty, 0] \cup_i [0, +\infty[$, où $i\colon \{0\} \to [0, +\infty[$ est l'application naturelle $i(0) = 0$.

Exercice 6.
Montrer que $[0, 1]/\{0, 1\} \cong S^1$en construisant un carré cocartésien

$$\begin{tikzcd} \{0,1\} \arrow[r] \arrow[d] & \{\mathrm{pt}\} \arrow[d, dotted] \\ {[0,1]} \arrow[r, dotted] & S^1. \end{tikzcd}$$

Exercice 7. (Problème de séparation du quotient)
Soit X un espace topologique, $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur X et $p\colon X \to X/\mathcal{R}$ la surjection canonique.
a. On suppose que p est ouverte. Montrer que $X/\mathcal{R}$ est séparé si et seulement si le graphe de $\mathcal{R}$ est un fermé de $X \times X$.
b. On suppose X compact. Montrer que $X/\mathcal{R}$ est séparé si et seulement si p est fermée.

Exercice 8.
Soient X un espace topologique compact et A une partie de X. Montrer que X/A est séparé si et seulement si A est un fermé de X.

Exercice 9.
Le *cône* d'un espace topologique X est l'espace quotient $C(X) = X \times [0, 1]/X \times \{0\}$.
Montrer que $C(S^{n-1}) \cong B^n$.

Exercice 10.
Montrer que $B^n/S^{n-1} \cong S^n$.

Exercice 11.
Utiliser les applications quotients $p\colon S^{n-1} \to \mathbb{RP}^{n-1}$ et $q\colon S^{2n-1} \to \mathbb{CP}^{n-1}$ de l'exercice 2 pour construire des carrés cocartésiens :

$$\begin{tikzcd} S^{n-1} \arrow[r, "p"] \arrow[d] & \mathbb{RP}^{n-1} \arrow[d, dotted] \\ D^n \arrow[r, dotted] & \mathbb{RP}^n \end{tikzcd} \quad \text{et} \quad \begin{tikzcd} S^{2n-1} \arrow[r, "q"] \arrow[d] & \mathbb{CP}^{n-1} \arrow[d, dotted] \\ D^{2n} \arrow[r, dotted] & \mathbb{CP}^n. \end{tikzcd}$$