2013/14 - Master 1 - M416 - Topologie

TD4 - Groupe fondamental

Exercice 1. (Groupe fondamental d'un espace produit)
Soient X, Y deux espaces topologiques et $x \in X, y \in Y$. Montrer que $\pi_1(X\times Y, (x, y)) \cong \pi_1(X, x)\times\pi_1(Y, y)$.

Exercice 2. (Parties étoilées)
Un partie A d'un espace vectoriel est *étoilée* s'il existe $a \in A$ tel que $[a, x] \subset A$ pour tout $x \in A$.
Montrer qu'une partie étoilée d'un espace vectoriel topologique est simplement connexe.

Exercice 3.
Soit X un espace topologique connexe par arcs. On rappelle que tout chemin (dans X) d'un point $x \in X$ à un point $y \in X$ induit un isomorphisme de groupes $\pi_1(X, x) \to \pi_1(X, y)$.
Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
i. Pour tous $x, y \in X$, les chemins de x à y définissent le même isomorphisme $\pi_1(X, x) \to \pi_1(X, y)$;
ii. Le groupe fondamental $\pi_1(X, x)$ est commutatif pour un (et donc tout) $x \in X$.

Exercice 4. (Rétract d'un espace)
Soient X un espace topologique. Soit A un *rétract* de X, c'est-à-dire une partie A de X telle qu'il existe une application continue $r\colon X \to A$ vérifiant $ri = \mathrm{id}_A$, où $i\colon A \to X$ est l'inclusion. Soit $a \in A \subset X$.
a. Montrer que l'homomorphisme de groupes $r_*\colon \pi_1(X, a) \to \pi_1(A, a)$ induit par r est surjectif.
b. Montrer que le cercle S^1 n'est pas un rétract du disque fermé B^2.
c. Montrer que si $i_*(\pi_1(A, a))$ est distingué dans $\pi_1(X, a)$, alors

$$\pi_1(X, a) \cong \pi_1(A, a) \times \mathrm{Ker}(r_*).$$

[*Indication :* remarquer que $\pi_1(A, a) \cong i_*(\pi_1(A, a))$, puis montrer que $i_*(\pi_1(A, a)) \cap \mathrm{Ker}(r_*) = \{1\}$ et que les éléments de $i_*(\pi_1(A, a))$ et $\mathrm{Ker}(r_*)$ commutent.]

Exercice 5. (Groupe fondamental des groupes topologiques)
a. *Principe de Eckmann-Hilton.*
Soit M un ensemble muni de deux produits, i.e., deux applications $*\colon M\times M \to M$ et $\circ\colon M\times M \to M$, admettant une unité commune et vérifiant pour tous $a, b, c, d \in M$,

$$(a * b) \circ (c * d) = (a \circ c) * (b \circ d).$$

Montrez que les produits $*$ et $\circ$ sont égaux et que $* = \circ$ est associatif et commutatif.
b. Montrez que le groupe fondamental d'un groupe topologique (i.e., un groupe dont la multiplication et la fonction inverse sont continues) est commutatif.