Université Lille1 Sciences et Technologies

2013/14 - Master 1 - M416 - Topologie

TD5 - Groupe fondamental 2

Exercice 1. (Groupes fondamentaux)
Quel est le groupe fondamental des espaces topologiques suivants ?
a. Le tore $S^1 \times S^1$.
b. Le tore solide $B^2 \times S^1$.
c. Le cylindre $S^1 \times [0,1]$.
d. Le cylindre infini $S^1 \times \mathbb{R}$.

Exercice 2. (Homomorphisme induit)
Soit $n \in \mathbb{Z}$. Notons $f\colon S^1 \to S^1$ l'application définie par $f(z) = z^n$.
Calculer l'homomorphisme induit $f_*\colon \pi_1(S^1, 1) \to \pi_1(S^1, 1)$.

Exercice 3. (Equivalence d'homotopie)
Construire des équivalences d'homotopies inverses $\phi\colon C_2 \to S^1$ et $\psi\colon S^1 \to C_2$ entre

$$C_2 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \,|\, z_1 \neq z_2\} \quad \text{et} \quad S^1 = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| = 1\}.$$

On explicitera des homotopies $\psi\phi \simeq \mathrm{id}_{C_2}$ et $\phi\psi \simeq \mathrm{id}_{S^1}$.

Exercice 4. (Rétract par déformation)
L'espace $\sqcap = [0,1] \times \{1\} \cup \{0,1\} \times [0,1]$ est-il un rétract par déformation de $[0,1] \times [0,1]$?

Exercice 5. (Théorème du point fixe de Brouwer pour le disque)
Montrer toute application continue $f\colon B^2 \to B^2$ possède un point fixe.
[*Indication :* dans le cas contraire, montrer l'application qui envoie $z \in B^2$ sur l'intersection de la demi-droite ouverte $]f(z), z)$ avec le cercle S^1 est un rétract de B^2 sur S^1.]

Exercice 6. (Théorème fondamental de l'algèbre)
Le but de l'exercice est de montrer que toute équation

$$z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = 0$$

de degré $n \geq 1$ à coefficients complexes admet (au moins) une racine complexe.
Pour cela, on suppose que l'équation n'a pas de racines.
a. Montrer qu'il existe $r > 0$ tel que

$$F(z,t) = z^n + t(a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0) \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

pour tout $(z,t) \in C_r \times [0,1]$, où $C_r = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| = r\}$ est le cercle de centre 0 et de rayon r.
b. En déduire que F est une homotopie entre les applications $p, q\colon C_r \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ définies par

$$p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 \quad \text{et} \quad q(z) = z^n.$$

c. Montrer que $G(z,t) = p(tz)$ définit une homotopie entre l'application $c\colon C_r \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ constante égale à a_0 et l'application p.
d. En déduire que q et c sont des applications homotopes et qu'il existe un isomorphisme de groupes ϕ rendant le diagramme suivant commutatif :

$$\begin{tikzcd} & \pi_1(\mathbb{C} \setminus \{0\}, r^n) \arrow[d, "\phi"] \\ \pi_1(C_r, r) \arrow[ur, "q_*"] \arrow[dr, "c_*"'] & \\ & \pi_1(\mathbb{C} \setminus \{0\}, a_0) \end{tikzcd}$$

e. Déduire du calcul de q_* que c_* est injectif. Conclure.