2013/14 - Master 1 - M416 - Topologie

TD6 - Groupe fondamental 3

Exercice 1. (Calcul de groupes fondamentaux)
Quel est le groupe fondamental des espaces topologiques suivants ?
a. $\mathbb{R}^3 \setminus D$, où D est une droite dans $\mathbb{R}^3$.
b. $\mathbb{R}^3 \setminus C$, où C est une cercle dans $\mathbb{R}^3$.
c. La *bouteille de Klein*

$$K = [0,1]^2/\mathcal{R},$$

où $\mathcal{R}$ est la relation d'équivalence engendrée par $(s,0) \sim (s,1)$ et $(0,t) \sim (1, 1-t)$ pour $s,t \in [0,1]$.

Exercice 2. (Attachement d'une cellule)
Soient X un espace topologique connexe par arcs, $n \geq 2$ et $f\colon S^{n-1} = \partial B^n \to X$ une application continue. Le but de l'exercice est de montrer que le groupe fondamental de l'espace topologique $B^n \cup_f X$ obtenu en attachant à X une cellule B^n de dimension n le long de f est

$$\pi_1(B^n \cup_f X) \cong \begin{cases} \pi_1(X, f(s_0))/N_f & \text{si } n = 2, \\ \pi_1(X) & \text{si } n \geq 3, \end{cases}$$

où, dans le cas $n = 2$, $s_0 \in S^1$ et N_f est le plus petit sous-groupe distingué de $\pi_1(X, f(s_0))$ contenant l'image de l'homomorphisme $f_*\colon \pi_1(S^1, s_0) \to \pi_1(X, f(s_0))$ induit par f.
a. Soient 0 le centre de la boule B^n et $p\colon B^n \sqcup X \to B^n \cup_f X$ est l'application quotient. On pose :

$$U = p((B^n \setminus \{0\}) \sqcup X) \quad \text{et} \quad V = p(B^n \setminus S^{n-1}).$$

Montrer que U, V, et $U \cap V$ sont des ouverts de $B^n \cup_f X$ connexes par arcs.
b. Montrer que V est simplement connexe.
c. Montrer que $U \cap V$ est un rétract par déformation de $p(S^{n-1}_{1/2})$, où $S^{n-1}_{1/2} \subset B^n$ est la sphère de centre 0 et de rayon $1/2$.
d. Montrer que $p(X)$ est un rétract par déformation de U via une rétraction $r\colon U \to p(X)$ telle que $rp(x/2) = pf(x)$ pour tout $x \in S^{n-1}$.
e. En déduire que pour tout $s_0 \in S^{n-1}$, il existe un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(S^{n-1}, s_0) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "f_*"'] & \pi_1(U \cap V, p(s_0/2)) \arrow[d, "j_*"] \\
\pi_1(X, f(s_0)) & \pi_1(U, p(s_0/2)). \arrow[l, "\cong"']
\end{tikzcd}$$

où les flèches horizontales sont des isomorphismes de groupes et $j\colon U \cap V \hookrightarrow U$ est l'inclusion.
f. Conclure.

Exercice 3. (Groupes fondamentaux des espaces projectifs complexes)
Le but de l'exercice est de montrer que les espaces projectifs complexes $\mathbb{CP}^n$ sont simplement connexes.
a. Montrer que $\mathbb{CP}^1 \cong S^2$. En déduire que $\mathbb{CP}^1$ est simplement connexe.
b. Soit $n \geq 2$. Montrer que

$$\mathbb{CP}^n \cong B^{2n} \cup_f \mathbb{CP}^{n-1},$$

où $f\colon S^{2n-1} = \partial B^{2n} \to \mathbb{CP}^{n-1}$ est la restriction de l'application quotient $\mathbb{C}^n \to \mathbb{CP}^{n-1}$.
c. Conclure en utilisant l'exercice 2.

Exercice 4. (Groupes fondamentaux des espaces projectifs réels)
Le but de l'exercice est de montrer que les groupes fondamentaux des espaces projectifs réels sont

$$\pi_1(\mathbb{RP}^1) \cong \mathbb{Z} \quad \text{et} \quad \pi_1(\mathbb{RP}^n) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \quad \text{pour } n \geq 2.$$

a. Montrer que $\mathbb{RP}^1 \cong S^1$. En déduire que $\pi_1(\mathbb{RP}^1) \cong \mathbb{Z}$.
b. Montrer que pour $n \geq 2$,

$$\mathbb{RP}^n \cong B^n \cup_f \mathbb{RP}^{n-1},$$

où $f\colon S^{n-1} = \partial B^n \to \mathbb{RP}^{n-1}$ est la restriction de l'application quotient $\mathbb{R}^n \to \mathbb{RP}^{n-1}$.
c. Conclure en utilisant l'exercice 2.

Exercice 5. (Groupe fondamental du bonnet d'âne)
Calculer le groupe fondamental du *bonnet d'âne* défini comme l'espace topologique quotient

$$A_n = B^2/\mathcal{R},$$

où $\mathcal{R}$ est la relation d'équivalence engendrée par $z \sim ze^{2i\pi/n}$ pour $z \in S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} = \partial B^2$.

Exercice 6. (Groupes de présentation finie comme groupes fondamentaux)
Montrer que tout groupe de présentation finie est le groupe fondamental d'un espace topologique.
[*Indication :* si $G \cong \langle g_1, \ldots, g_m \mid r_1, \ldots, r_n\rangle$, attacher n cellules B^2 au bouquet de m cercles.]

Exercice 7. (Invariance du domaine)
Soit $n > 2$. Le but de l'exercice est de montrer qu'un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$ n'est jamais homéomorphe à un ouvert non-vide de $\mathbb{R}^2$. Ce résultat est un cas particulier du théorème d'invariance du domaine : lorsque $m \neq m$, deux ouverts non vides de $\mathbb{R}^m$ et $\mathbb{R}^n$ ne sont jamais homéomorphes.
Supposons qu'il existe un homéomorphisme $h\colon U \to V$ entre un ouvert non vide U de $\mathbb{R}^n$ et un ouvert non vide V de $\mathbb{R}^2$. Soit $x \in U$. On pose $y = h(x) \in V$.
a. Montrer qu'il existe une boule ouverte B_1 centrée en x dans U et des boules ouvertes B_2, B_3 centrées en y dans V telles que $B_3 \subset h(B_1) \subset B_2$.
b. Soit $y_0 \in B_3 \setminus \{y\}$. On pose $x_0 = h^{-1}(y_0) \in B_1$ et on considère les applications

$$B_3 \setminus \{y\} \xrightarrow{h^{-1}} B_1 \setminus \{x\} \xrightarrow{h} B_2 \setminus \{y\}$$

obtenues par (co)restriction de l'homéomorphisme h et de son inverse. Déterminer les morphismes de groupes induits :

$$\pi_1(B_3 \setminus \{y\}, y_0) \xrightarrow{(h^{-1})_*} \pi_1(B_1 \setminus \{x\}, x_0) \xrightarrow{h_*} \pi_1(B_2 \setminus \{y\}, y_0).$$

c. Conclure.