Université Lille 1 Sciences et Technologies

2013/14 - Master 1 - M416 - Topologie

TD7 - Revêtements

Exercice 1. (Existence de relèvement)
Soit $f\colon \mathbb{RP}^2 \to S^1$ une application continue. Montrer qu'il existe une application continue $g\colon \mathbb{RP}^2 \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) = e^{ig(x)}$ pour tout $x \in \mathbb{RP}^2$.

Exercice 2. (Revêtements universels)
Expliciter les revêtements universels pour la sphère S^n, l'espace projectif réel $\mathbb{RP}^n$, le tore $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$.

Exercice 3. (Puissance n-ième)
Soient $n \geq 1$ et $p_n\colon \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ l'application définie par $p_n(z) = z^n$.
a. Montrer que p_n est un revêtement à n feuillets.
b. Décrire le groupe des automorphismes de p_n.

Exercice 4. (Endomorphismes des revêtements galoisiens)
Soit $p\colon E \to B$ un revêtement galoisien où E est connexe localement connexe par arcs. Montrer que tout endomorphisme de p est un automorphisme de p.

Exercice 5. (Automorphismes de revêtements)
Soit $p\colon E \to B$ un revêtement non galoisien à trois feuillets où E est connexe localement connexe par arcs.
a. Combien d'automorphismes p possède-t-il ?
b. Montrer que pour tout $b_0 \in B$, le groupe fondamental $\pi_1(B, b_0)$ n'est pas commutatif.

Exercice 6. (Revêtements à deux feuillets de la figure huit)
Montrer qu'il y a (à isomorphisme près) trois revêtements connexes à deux feuillets de la figure huit (i.e., du bouquet de deux cercles).

Exercice 7. (Théorème de Borsuk-Ulam)
Le but l'exercice est de montrer que si $f\colon S^n \to \mathbb{R}^2$ est une application continue, où $n \geq 2$, alors il existe un point $x \in S^n$ tel que $f(-x) = f(x)$. (C'est le théorème de Borsuk-Ulam.)
Pour cela, on raisonne par l'absurde en supposant que $f(-x) \neq f(x)$ pour tout $x \in S^n$.
a. Montrer que l'application $g\colon S^n \to S^1$, définie par

$$g(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{\|f(x) - f(-x)\|},$$

est continue et que $g(-x) = -g(x)$ pour tout $x \in S^n$.
b. Montrer qu'il existe une application continue $h\colon S^n \to \mathbb{R}$ telle que $g(x) = e^{2i\pi h(x)}$ pour tout $x \in S^n$.
c. Conclure.