Université Lille1
Sciences et Technologies

Master 1 - M416 - Topologie

2014/15 - Devoir surveillé n°1

Durée : 2h00

Exercice 1. (Questions de cours)
a. Qu'est-ce la *topologie quotient* ?
b. Qu'est-ce qu'une *équivalence d'homotopie* ?
c. Qu'est-ce qu'un espace topologique *contractile* ?

Exercice 2. (Suspension d'un espace topologique)
La *suspension* d'un espace topologique X est l'espace quotient

$$\Sigma(X) = X \times [0,1]/\mathcal{R}$$

où $\mathcal{R}$ est la relation d'équivalence sur $X \times [0,1]$ dont les classes d'équivalence sont $X \times \{0\}$, $X \times \{1\}$, et les singletons $\{(x,t)\}$ pour $(x,t) \in X \times]0,1[$.
Montrer que $\Sigma(S^{n-1})$ est homéomorphe S^n pour tout $n \geq 1$.
[*Indication :* considérer l'application $(x,t) \in S^{n-1} \times [0,1] \mapsto (\sin(\pi t)x, \cos(\pi t)) \in S^n$.]

Exercice 3. (Vrai ou faux)
Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses.
Justifier la réponse par une courte preuve ou un contre-exemple.
a. Tout rétract d'un espace contractile est contractile.
b. Tout ensemble muni de la topologie discrète est simplement connexe.

Exercice 4. (Espace des lacets)
Soient X un espace topologique et $x_0 \in X$. On rappelle qu'un lacet de X basé en x_0 est une application continue $\alpha \colon [0,1] \to X$ telle que $\alpha(0) = \alpha(1) = x_0$. On munit l'ensemble $\Omega(X, x_0)$ des lacets de X basés en x_0 de la topologie dite *compacte-ouverte*, c'est-à-dire engendrée par les ensembles

$$W(K,U) = \{\alpha \in \Omega(X,x_0) \,|\, \alpha(K) \subset U\}$$

où K est un compact de $[0,1]$ et U est un ouvert de X. L'ensemble des composantes connexes par arcs d'un espace topologique Y se note $\pi_0(Y)$. Le but de l'exercice est de montrer que

$$\pi_1(X,x_0) = \pi_0(\Omega(X,x_0)).$$

a. Montrer que deux lacets α, β de X basés en x_0 sont homotopes (à extrémités fixes) si et seulement s'il existe un chemin (continu) dans $\Omega(X,x_0)$ reliant α à β.
[*Indication :* relier une homtopie H de α à β et un chemin Γ dans $\Omega(X,x_0)$ de α à β par $\Gamma(t) = H(\cdot, t)$.]
b. Conclure.