Université Lille1
Sciences et Technologies

Master 1 - M416 - Topologie

2014/15 - Devoir surveillé n°2

Durée : 3h00

Les trois exercices et le problème sont indépendants. Les notes de cours et de TD sont autorisées. Il sera tenu compte de la clarté et de la précision de la rédaction.

Exercice 1. (Vrai ou faux)
Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses.
Justifier la réponse par une courte preuve ou un contre-exemple.
a. Une application continue injective induit un morphisme injectif entre les groupes fondamentaux.
b. Le groupe fondamental de $S^1 \times S^1$ est isomorphe au produit libre $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$.
c. Etant donnés des groupes topologiques G et H, un morphisme de groupe $f : G \to H$ est continue si et seulement s'il est continue en 1_G.

Exercice 2. (Espace des configurations)
L'*espace des configurations de 2 points dans* $\mathbb{C}$ est le sous-espace topologique de $\mathbb{C}^2$ défini par

$$F_2 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \,|\, z_1 \neq z_2\}.$$

a. Montrer que F_2 a le même type d'homotopie que $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| = 1\}$.
Indication : montrer que les applications $\psi: S^1 \to F_2$ et $\phi: F_2 \to S^1$, définies par $\psi(z) = (z, 0)$ et $\phi(z_1, z_2) = (z_1 - z_2)/|z_1 - z_2|$, sont des équivalences d'homotopie inverses l'une de l'autre en explicitant des homotopies $\phi\psi \simeq \mathrm{id}_{S^1}$ et $\psi\phi \simeq \mathrm{id}_{F_2}$.
b. En déduire que F_2 est connexe par arcs et que son groupe fondamental est isomorphe à $\mathbb{Z}$.

Exercice 3. (Automorphismes de revêtements)
Combien d'automorphismes possède un revêtement non galoisien à cinq feuillets dont l'espace total est connexe et localement connexe par arcs ?

Problème

Partie I. (Revêtements d'un groupe topologique)
Soit $p: E \to G$ un revêtement, où E est un espace topologique et G est un groupe topologique. On suppose que E et G sont connexes et localement connexes par arcs. On note le produit de G par $*$ et son élément neutre par 1. Soit $e \in p^{-1}(1)$. Le but de cette partie est de montrer qu'il existe sur E une unique structure de groupe topologique admettant e pour élément neutre et telle que p soit un homomorphisme de groupes topologiques.
a. Soient α et β sont deux lacets de G basés en 1. Notons par $\alpha * \beta$ et $\hat{\alpha}$ les lacets de G définis par $(\alpha * \beta)(s) = \alpha(s) * \beta(s)$ et $\hat{\alpha}(s) = \alpha(s)^{-1}$ pour $s \in [0, 1]$. Montrer que dans $\pi_1(G, 1)$ on a :

$$[\alpha][\beta] = [\alpha * \beta] \quad \text{et} \quad [\alpha]^{-1} = [\hat{\alpha}].$$

Indication : montrer que $\alpha * \beta$ est homotope (à extrémités fixes) à la composition usuelle $\alpha \cdot \beta$ des lacets α et β. Pour cela, on pourra considérer l'application $H: [0, 1] \times [0, 1] \to G$, définie par $H(s, t) = A(s, t) * B(s, t)$, où A et B sont des homotopies (à extrémités fixes) de α à $\alpha \cdot c$ et de β à $c \cdot \beta$, respectivement, c désignant le lacet de G constant égal à 1.
b. Soit $m: E \times E \to G$ l'application définie $m(x, y) = p(x) * p(y)$.
Montrer que $m_*(\pi_1(E \times E, (e, e))) \subset p_*(\pi_1(E, e))$. En déduire qu'il existe une unique application continue $\tilde{m}: E \times E \to E$ telle que $\tilde{m}(e, e) = e$ et $p\tilde{m} = m$.
c. Soit $\iota: E \to G$ l'application définie $\iota(x) = p(x)^{-1}$.
Montrer qu'il existe une unique application continue $\tilde{\iota}: E \to E$ telle que $\tilde{\iota}(e) = e$ et $p\tilde{\iota} = \iota$.

d. Montrer que pour tous $x, y, z \in E$,

$$\tilde{m}(\tilde{m}(x,y),z) = \tilde{m}(x,\tilde{m}(y,z)) \quad \text{et} \quad \tilde{m}(\tilde{\iota}(x),x) = e = \tilde{m}(x,\tilde{\iota}(x)).$$

e. Conclure.

Partie II. (Structure de groupe topologique sur S^3)
Le but de cette partie est de montrer que la sphère

$$S^3 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1\}$$

admet une structure de groupe topologique non commutatif. Pour cela, on considère les espaces topologiques

$$B^3 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 1\} \quad \text{et} \quad \mathrm{SO}_3(\mathbb{R}) = \{M \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{R}) \mid {}^tMM = \mathrm{I}_3 \text{ et } \det(M) = 1\},$$

ainsi que le groupe multiplicatif $\mathbb{Z}_2 = \{1, -1\}$.

a. Montrer que l'application quotient $p\colon S^3 \to S^3/\mathbb{Z}_2$ est un revêtement, où $\mathbb{Z}_2$ agit par multiplication scalaire sur S^3.

b. Soit $\sim$ la relation d'équivalence sur B^3 définie par $x \sim y$ si $x = y$ ou ($x \in S^2$ et $y = -x$).
Montrer que $S^3/\mathbb{Z}_2 \cong B^3/\sim$.
Indication : considérer l'application $pf\colon B^3 \to S^3/\mathbb{Z}_2$, où $f\colon B^3 \to S^3$ est définie par

$$f(x) = (x_1, x_2, x_3, \sqrt{1 - \|x\|^2}) \quad \text{pour} \quad x = (x_1, x_2, x_3) \quad \text{avec} \quad \|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}.$$

c. Montrer que $B^3/\sim \,\cong \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$.
Indication : considérer l'application $h\colon B^3 \to \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ définie par : $h(0) = \mathrm{I}_3$ et, pour $x \in B^3 \setminus \{0\}$, $h(x)$ est la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ de la rotation de vecteur directeur x et d'angle $\pi\|x\|$.

d. En déduire un revêtement $S^3 \to \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ et conclure (au moyen de la partie I).