Université Lille1
Sciences et Technologies

2014/15 - Master 1 - M416 - Topologie

TD1 - Topologie générale

Exercice 1.
Soit X un ensemble. Vérifier que l'ensemble vide et les complémentaires de parties finies de X forment une topologie sur X, appelée *topologie cofinie*.

Exercice 2. (Base pour une topologie)
Soit X un ensemble. Une *base pour une topologie sur* X est un ensemble $\mathcal{B}$ de parties de X tel que

(i) pour tout $x \in X$, il existe $B \in \mathcal{B}$ contenant x ;
(ii) pour tous $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ et tout $x \in B_1 \cap B_2$, il existe $B_3 \in \mathcal{B}$ tel que $x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

a. Montrer qu'une partie U de X est une réunion de d'éléments de $\mathcal{B}$ si et seulement si pour tout $x \in U$, il existe $B \in \mathcal{B}$ tel que $x \in B \subset U$.
b. Montrer que l'ensemble $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ des parties de X vérifiant les conditions équivalentes de la question précédente est une topologie sur X, appelée la *topologie engendrée par* $\mathcal{B}$.
c. Verifier que $\mathcal{B}$ engendre bien la topologie $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$, i.e., que $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ est la plus petite (au sens de l'inclusion) topologie sur X contenant contenant $\mathcal{B}$.
c. Montrer que l'ensemble des boules ouvertes d'espace métrique (X, d) est une base pour une topologie sur X. La topologie sur X engendrée par cette base s'appelle la *topologie induite par la distance* d.

Exercice 3. (Base d'une topologie)
Soit X un espace topologique. Une *base pour la topologie de* X est une base pour une topologie sur X qui engendre la topologie de X.
a. Soit $\mathcal{B}$ un ensemble d'ouverts de X. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
(i) $\mathcal{B}$ est une base pour la topologie de X ;
(ii) pour tout ouvert U de X et tout $x \in U$, il existe $B \in \mathcal{B}$ tel que $x \in B \subset U$;
(iii) les ouverts de X sont les réunions d'ouverts dans $\mathcal{B}$.
b. Soient X, Y des espaces topologiques et $\mathcal{B}$ une base pour la topologie de Y. Montrer qu'une application $f : X \to Y$ est continue si et seulement si pout tout $B \in \mathcal{B}$, $f^{-1}(B)$ est un ouvert de X.

Exercice 4.
Soient $\mathcal{B}$ l'ensemble des intervalles ouverts $]a, b[$ et $\mathcal{B}'$ l'ensemble des intervalles demi-ouverts $[a, b[$, où a, b sont des nombres réels tels que $a < b$. Montrer que $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont des bases pour une topologie sur $\mathbb{R}$. Comparer les topologies sur $\mathbb{R}$ qu'elles engendrent.

Exercice 5. (Topologie produit)
Soient X et Y deux espaces topologiques. On munit $X \times Y$ du la *topologie produit*, c'est-à-dire de la topologie engendrée par la base $\mathcal{B} = \{U \times V \,|\, U \text{ ouvert de } X,\ V \text{ ouvert de } Y\}$.
a. Verifier que $\mathcal{B}$ est bien une base pour une topologie sur $X \times Y$.
b. Montrer que les projections $p_1 : X \times Y \to X$ et $p_2 : X \times Y \to Y$ sont continues.
c. Montrer qu'une application $f : Z \to X \times Y$, où Z est un espace topologique, est continue si et seulement si les deux applications $p_1 f : Z \to X$ et $p_2 f : Z \to Y$ sont continues.
d. Il est faux de conjecturer qu'une application $f : X \times Y \to Z$ est continue si elle est continue en chaque variable séparément. Vérifier cela en considérant la fonction $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $F(0, 0) = 0$ et $F(x, y) = xy/(x^2 + y^2)$ si $(x, y) \neq (0, 0)$.

Exercice 6. (Espaces topologiques séparés)
Un espace topologique est *séparé* si deux points distincts de l'espace admettent toujours des voisinages ouverts disjoints.

a. Montrer qu'un espace topologique X est séparé si et seulement si la diagonale $\Delta = \{(x,x) \,|\, x \in X\}$ est un fermé de $X \times X$.

b. Montrer que le produit de deux espaces topologiques séparés est séparé.

c. Soit $f\colon X \to Y$ une application continue avec Y séparé. Montrer que le *graphe* de f, défini comme l'ensemble $\Delta_f = \{(x, f(x)) \,|\, x \in X\}$, est un fermé de $X \times Y$.

Exercice 7. (Topologie induite)

a. Soient X un espace topologique, ayant $\mathcal{T}$ pour topologie, et A est une partie de X. Verifier que

$$\mathcal{T}_A = \{U \cap A \,|\, U \in \mathcal{T}\}$$

est une topologie sur A, appelée *topologie induite* sur A par X. Un *sous-espace topologique* de X est une partie de X munie de la topologie induite par X.

b. Soient X, Y des espaces topologiques, A un sous-espace topologique de X et B un sous-espace topologique de Y. Montrer que la topologie produit sur $A \times B$ coïncide avec la topologie induite sur $A \times B$ par $X \times Y$.

c. La boucle d'oreille hawaïenne est l'union $C = \cup_{n\geq 1} C_n$ des cercles C_n de centre $(1/n, 0)$ et de rayon $1/n$. On munit C de la topologie induite par $\mathbb{R}^2$. Montrer que l'application $f\colon C \to C$, définie par $f(x,y) = (nx, ny)$ pour $(x,y) \in C_n$, n'est pas continue.

Exercice 8. (Topologie de Zariski)
Soit $\mathcal{P} = \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ l'anneau des polynômes à n variables. A tout idéal I de $\mathcal{P}$, on associe l'ensemble

$$Z(I) = \{\, (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{C}^n \,|\, P(a_1, \ldots, a_n) = 0 \text{ pour tout } P \in I \,\}.$$

a. Montrer que les ensembles $Z(I)$ définissent l'ensemble des fermés d'une topologie sur $\mathbb{C}^n$, appelée *topologie de Zariski*.

b. Vérifier que pour $n = 1$, la topologie de Zariski coïncide avec la topologie cofinie (voir l'exercice 1).

c. Montrer que $\mathcal{B} = \{B_P \,|\, P \in \mathcal{P}\}$, où

$$B_P = \mathbb{C}^n \setminus Z((P)) = \{\, (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{C}^n \,|\, P(a_1, \ldots, a_n) \neq 0 \,\},$$

est une base d'ouverts de la topologie de Zariski.

d. Observer que la topologie de Zariski n'est pas séparée : deux ouverts non-vides se rencontrent obligatoirement.

Exercice 9.
Montrer que les homéomorphismes $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont les bijections monotones de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
[*Indication :* utiliser le théorème des valeurs intermédiaires pour montrer qu'une application continue injective $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est monotone.]

Exercice 10.
Montrer qu'une application bijective continue n'est pas forcément un homéomorphisme.