2014/15 - Master 1 - M416 - Topologie

TD3 - Topologie quotient

Exercice 1.
Les sous-espaces $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ sont-ils compacts ?

Exercice 2. (Projection stéréographique)
Soit $N = (0, \ldots, 0, 1)$ le pole nord de la sphère $S^n = \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \,\big|\, x_1^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 1\}$. La *projection stéréographique de pole N* est l'application $p\colon S^n \backslash \{N\} \to \mathbb{R}^n$ qui associe à tout $x \in S^n \backslash \{N\}$ l'unique point $p(x)$ de $\mathbb{R}^n$ tel que les points N, x, et $(p(x), 0)$ soient alignés dans $\mathbb{R}^{n+1}$.
a. Calculer $p(x)$ pour tout $x = (x_1, \ldots, x_{n+1}) \in S^n \backslash \{N\}$.
On fera un dessin illustrant la situation dans le cas $n = 2$.
b. Montrer que p est un homéomorphisme.

Exercice 3. (Quotient par identification)
Soient X un ensemble, A une partie non vide de X, et $f\colon A \to X$ une application telle que

$$\forall\, x \in A, \qquad f(x) \in A \Rightarrow f^2(x) \in \{x, f(x)\}.$$

Pour $x \in X$, on définit la partie $\overline{x}$ de X par

$$\overline{x} = \begin{cases} \{x\} & \text{si } x \notin A \cup f(A), \\ \{f(x)\} \cup f^{-1}(\{f(x)\}) & \text{si } x \in A, \\ \{x\} \cup f^{-1}(\{x\}) & \text{si } x \in f(A) \backslash A. \end{cases}$$

Soit $\mathcal{R}$ la relation sur X définie par $x \mathcal{R} y$ si $y \in \overline{x}$.
Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur X telle que la classe d'équivalence de tout $x \in X$ est $\overline{x}$ et $\overline{f(x)} = \overline{x}$ pour tout $x \in A$. L'ensemble quotient est $X/\mathcal{R}$ est noté X/f.
[*Indication :* on pourra montrer que $\overline{f(x)} = \overline{x}$ pour $x \in A$, puis que $x \mathcal{R} y$ si et seulement si $\overline{x} = \overline{y}$.]

Exercice 4. (Actions de groupes)
On rappelle qu'un groupe G qui agit sur un ensemble X définit sur X une relation d'équivalence, l'ensemble quotient (i.e., l'ensemble des orbites de l'action) étant noté X/G. En particulier, lorsque X est un espace topologique, on munit X/G de la topologie quotient.
⚠ Lorsque $G \subset X$, on ne confondra pas l'espace X/G ainsi défini avec l'espace obtenu en identifiant G à un point (également noté X/G).
a. Montrer que $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ n'est pas séparé, où $\mathbb{Q}$ agit sur $\mathbb{R}$ par translation.
b. Montrer que $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong S^1 = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| = 1\}$, où $\mathbb{Z}$ agit sur $\mathbb{R}$ par translation.

Exercice 5. (Actions continues de groupes topologiques)
Soit G un groupe topologique (i.e., un groupe muni d'une topologie telle que la multiplication et la fonction inverse soient continues) agissant continûment sur un espace topologique X.
a. Montrer que la surjection canonique $p\colon X \to X/G$ est ouverte.
En déduire que X/G est séparé si et seulement si $\cap_{g \in G} \{(x, y) \in X \times X \,|\, y \neq gx\}$ est un ouvert de $X \times X$.
b. On suppose G fini. Montrer que la surjection canonique $p\colon X \to X/G$ est fermée.
En déduire que si X est compact, alors X/G l'est également.

Exercice 6.
Le *cône* d'un espace topologique X est l'espace quotient $C(X) = X \times [0, 1]/X \times \{0\}$.
Montrer que $C(S^{n-1}) \cong B^n$.
[*Indication :* on pourra utiliser l'application $(x, t) \in S^{n-1} \times [0, 1] \mapsto tx \in B^n$.]

Exercice 7. (Espaces projectifs)
Soient $\mathbb{K}$ un corps et $n \geq 1$. L'*espace projectif sur* $\mathbb{K}$ *dimension* n est le quotient

$$\mathbb{KP}^n = (\mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\})/\mathbb{K}^*$$

où $\mathbb{K}^*$ agit par multiplication scalaire. La classe de $(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\}$ se note $[x_1, \dots, x_{n+1}]$. Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on munit $\mathbb{KP}^n$ de la topologie quotient.

a. Montrer que $\mathbb{CP}^n$ et $\mathbb{RP}^n$ sont séparés.

b. Montrer que

$$\mathbb{CP}^n \cong S^{2n+1}/S^1,$$

où $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ agit sur $S^{2n+1} = \{(z_1, \dots, z_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1} \mid |z_1|^2 + \cdots + |z_{n+1}|^2 = 1\}$ par multiplication scalaire. En déduire que $\mathbb{CP}^n$ est compact.

c. Montrer que $\mathbb{CP}^1 \cong S^2$. En déduire que $S^3/S^1 \cong S^2$.

d. Montrer que

$$\mathbb{RP}^n \cong S^n/\mathbb{Z}_2,$$

où $\mathbb{Z}_2 = \{1, -1\}$ agit sur $S^n = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_1^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 1\}$ par multiplication scalaire. En déduire que $\mathbb{RP}^n$ est compact.

Exercice 8. (Carrés cocartésiens)
Un *carré cocartésien* d'espaces topologiques est un carré

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "f_2"'] & X \arrow[d, "g_1"] \\ Y \arrow[r, "g_2"'] & Z \end{tikzcd}$$

où A, X, Y, Z sont des espcaces topologiques et f_1, f_2, g_1, g_2 sont des applications continues, qui est commutatif ($g_1 f_1 = g_2 f_2$) et tel que pour tout espace topologique W et toutes applications continues $h_1 \colon X \to W$, $h_2 \colon Y \to W$ vérifiant $h_1 f_1 = h_2 f_2$, il existe une unique application continue $\phi \colon Z \to W$ telle que $h_1 = \phi g_1$ et $h_2 = \phi g_2$.

a. Soient deux carrés cocartésiens

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "f_2"'] & X \arrow[d, "g_1"] \\ Y \arrow[r, "g_2"'] & Z \end{tikzcd} \quad \text{et} \quad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "f_2"'] & X \arrow[d, "g_1'"] \\ Y \arrow[r, "g_2'"'] & Z' \end{tikzcd}$$

Montrer qu'il existe un unique homéomorphisme $\varphi \colon Z \to Z'$ tel que $g_1' = \varphi g_1$ et $g_2' = \varphi g_2$.

b. Soient X, Y des espaces topologiques, A est une partie de Y, et $f \colon A \to X$ est une application continue. Notons $X \cup_f Y$ le recollement de Y à X le long de f. Soient $i \colon A \to Y$ l'application d'inclusion, $j \colon X \to X \cup_f Y$ et $g \colon Y \to X \cup_f Y$ les applications induites par les inclusions $X \to X \sqcup Y$ et $Y \to X \sqcup Y$. Montrer que le carré suivant est cocatésien :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] & X \arrow[d, "j"] \\ Y \arrow[r, "g"'] & X \cup_f Y \end{tikzcd}$$

c. Utiliser les surjections canoniques $p \colon S^{2n-1} \to \mathbb{CP}^{n-1}$ et $q \colon S^{n-1} \to \mathbb{RP}^{n-1}$ de l'exercice 7 pour construire des carrés cocartésiens :

$$\begin{tikzcd} S^{2n-1} \arrow[r, "p"] \arrow[d, hook] & \mathbb{CP}^{n-1} \arrow[d] \\ B^{2n} \arrow[r] & \mathbb{CP}^n \end{tikzcd} \quad \text{et} \quad \begin{tikzcd} S^{n-1} \arrow[r, "q"] \arrow[d, hook] & \mathbb{RP}^{n-1} \arrow[d] \\ B^n \arrow[r] & \mathbb{RP}^n \end{tikzcd}$$

d. En déduire que $\mathbb{CP}^n \cong \mathbb{CP}^{n-1} \cup_p B^{2n}$ et $\mathbb{RP}^n \cong \mathbb{RP}^{n-1} \cup_q B^n$.