Université Lille1
Sciences et Technologies

2014/15 - Master 1 - M416 - Topologie

TD4 - Homotopie

Exercice 1.
Soient X, Y, Z des espaces topologiques, $f, f'\colon X \to Y$ et $g, g'\colon Y \to Z$ des applications continues. Montrer que si $f' \simeq f$ et $g' \simeq g$ alors $g'f' \simeq gf$.

Exercice 2.
a. Soit X un espace topologique. Montrer que X et $X \times [0,1]$ ont même type d'homotopie.
b. Montrez que la réunion de deux sphères S^n tangentes en un point a le même type d'homotopie que $\mathbb{R}^{n+1}$ privé de deux points.

Exercice 3.
Soient X, Y deux espaces topologiques ayant le même type d'homotopie.
Montrer que si X est connexe par arcs, alors Y l'est également.

Exercice 4.
Un partie A d'un espace vectoriel est *étoilée* s'il existe $a \in A$ tel que $[a, x] \subset A$ pour tout $x \in A$.
Montrer qu'une partie étoilée d'un espace vectoriel topologique est contractile.

Exercice 5.
Montrer qu'un rétract d'un espace séparé est un fermé.

Exercice 6.
Soient A un rétract d'un espace topologique X et $a \in A$.
On choisit une rétraction $r\colon X \to A$ de l'inclusion $i\colon A \hookrightarrow X$.
a. Montrer que les homomorphismes de groupes $i_*\colon \pi_1(A,a) \to \pi_1(X,a)$ et $r_*\colon \pi_1(X,a) \to \pi_1(A,a)$ induits par i et r sont respectivement injectif et surjectif.
b. Montrer que si $i_*(\pi_1(A,a))$ est distingué dans $\pi_1(X,a)$, alors

$$\pi_1(X,a) \cong \pi_1(A,a) \times \operatorname{Ker}(r_*).$$

[*Indication :* remarquer que $\pi_1(A,a) \cong i_*(\pi_1(A,a))$, puis montrer que $i_*(\pi_1(A,a)) \cap \operatorname{Ker}(r_*) = \{1\}$ et que les éléments de $i_*(\pi_1(A,a))$ et $\operatorname{Ker}(r_*)$ commutent.]

Exercice 7.
Soit X un espace topologique connexe par arcs. On rappelle que tout chemin (dans X) d'un point $x \in X$ à un point $y \in X$ induit un isomorphisme de groupes $\pi_1(X,x) \to \pi_1(X,y)$.
Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
a. Pour tous $x, y \in X$, les chemins de x à y définissent le même isomorphisme $\pi_1(X,x) \to \pi_1(X,y)$;
b. Le groupe fondamental $\pi_1(X,x)$ est commutatif pour un (et donc tout) $x \in X$.

Exercice 8. (Groupe fondamental des groupes topologiques)
a. *Principe de Eckmann-Hilton.*
Soit M un ensemble muni de deux produits, i.e., deux applications $*\colon M\times M \to M$ et $\circ\colon M\times M \to M$, admettant une unité commune et vérifiant pour tous $a, b, c, d \in M$,

$$(a * b) \circ (c * d) = (a \circ c) * (b \circ d).$$

Montrez que les produits $*$ et $\circ$ sont égaux et que $* = \circ$ est associatif et commutatif.
b. Montrez que le groupe fondamental d'un groupe topologique est commutatif.