Université Lille1
Sciences et Technologies

2014/15 - Master 1 - M416 - Topologie

TD5 - Groupe fondamental

Exercice 1. (Groupes fondamentaux)
Quel est le groupe fondamental des espaces topologiques suivants ?
a. Le tore $S^1 \times S^1$.
b. Le tore solide $B^2 \times S^1$.
c. Le cylindre $S^1 \times [0,1]$.
d. Le cylindre infini $S^1 \times \mathbb{R}$.

Exercice 2. (Degré)
Soit $n \in \mathbb{Z}$. Calculer le degré de l'application $f\colon S^1 \to S^1$ définie par $f(z) = z^n$.

Exercice 3. (Théorème du point fixe de Brouwer pour le disque)
Montrer toute application continue $f\colon B^2 \to B^2$ possède un point fixe.
[*Indication :* dans le cas contraire, montrer l'application qui envoie $z \in B^2$ sur l'intersection de la demi-droite ouverte $]f(z), z)$ avec le cercle S^1 est un rétract de B^2 sur S^1.]

Exercice 4. (Théorème fondamental de l'algèbre)
Le but de l'exercice est de montrer que toute équation

$$z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = 0$$

de degré $n \geq 1$ à coefficients complexes admet (au moins) une racine complexe.
Pour cela, on suppose que le polynôme $P(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ n'a pas de racines et on considère les applications $f\colon S^1 \to S^1$ et $G, H\colon S^1 \times [0,1] \to S^1$ définies par

$$f(z) = \frac{P(z)}{|P(z)|}, \qquad G(z,t) = \frac{P(tz)}{|P(tz)|}, \qquad H(z,t) = \frac{t^n P(z/t)}{|t^n P(z/t)|}.$$

a. Montrer que f est de degré nul en considérant G.
b. Montrer que f est de degré n en considérant H.
c. Conclure.

Exercice 5. (Théorème de Borsuk-Ulam)
Le but de l'exercice est de montrer que pour toute application continue $f\colon S^2 \to \mathbb{R}^2$, il existe un point $x \in S^2$ tel que $f(x) = f(-x)$.
a. Montrer que si $g\colon S^1 \to S^1$ est une application continue qui s'étend continûment au disque B^2, alors g est de degré nul.
b. Montrer que si $g\colon S^1 \to S^1$ est une application continue telle que $g(-z) = -g(z)$ pour tout $z \in S^1$, alors g est de degré impair.
c. Montrer qu'il n'existe pas d'application continue $h\colon S^2 \to S^1$ telle que $h(-x) = -h(x)$ pour tout point $x \in S^2$.
d. Conclure.

Exercice 6. (Théorème de Lusternik-Schnirelmann)
Montrer que si la sphère S^2 est recouverte par trois fermés, alors l'un d'entre eux contient deux points antipodaux.
[*Indication :* pour A, B des fermés de S^2, considérer l'application $x \in S^2 \mapsto (d(x,A), d(x,B)) \in \mathbb{R}^2$.]