



Exercice 1. (Existence de relèvement)

Soit $f: \mathbb{RP}^2 \rightarrow S^1$ une application continue. Montrer qu'il existe une application continue $g: \mathbb{RP}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(x) = e^{ig(x)}$ pour tout $x \in \mathbb{RP}^2$.

Exercice 2. (Revêtements universels)

Expliciter des revêtements universels pour la sphère S^n , l'espace projectif réel \mathbb{RP}^n , le tore $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$.

Exercice 3. (Puissance n-ième)

Soient $n \geq 1$ et $p_n: \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$ l'application définie par $p_n(z) = z^n$.

- Montrer que p_n est un revêtement à n feuillets.
- Décrire le groupe des automorphismes de p_n .

Exercice 4. (Endomorphismes des revêtements galoisiens)

Soit $p: E \rightarrow B$ un revêtement galoisien où E est connexe localement connexe par arcs. Montrer que tout endomorphisme de p est un automorphisme de p .

Exercice 5. (Automorphismes de revêtements)

Soit $p: E \rightarrow B$ un revêtement non galoisien à trois feuillets où E est connexe localement connexe par arcs.

- Combien d'automorphismes p possède-t-il ?
- Montrer que pour tout $b_0 \in B$, le groupe fondamental $\pi_1(B, b_0)$ n'est pas commutatif.

Exercice 6. (Revêtements à deux feuillets de la figure huit)

Montrer qu'il y a (à isomorphisme près) trois revêtements connexes à deux feuillets de la figure huit (i.e., du bouquet de deux cercles).

Exercice 7. (Construction du revêtement universel)

Soient B un espace topologique et $b_0 \in B$. Notons par C l'ensemble des chemins dans B d'origine b_0 , par \widetilde{B} le quotient de C par la relation d'homotopie à extrémités fixes, et par $[\alpha]$ la classe d'homotopie à extrémités fixes d'un chemin α dans B . L'évaluation d'un chemin en 1 définit une application

$$\widetilde{p}: \widetilde{B} \rightarrow B.$$

Le but de l'exercice est de montrer que lorsque B est connexe par arcs, localement connexe par arcs et semi-localement simplement connexe, on peut munir \widetilde{B} d'une topologie telle que $\widetilde{p}: \widetilde{B} \rightarrow B$ soit un revêtement universel de B .

- Soit \mathcal{P} l'ensemble des paires (U, α) où U est ouvert de B connexe par arcs et $\alpha \in C$ tels que $\alpha(1) \in U$. Pour $(U, \alpha) \in \mathcal{P}$, on définit

$$\Omega(U, \alpha) = \{[\alpha\beta] \mid \beta \text{ chemin dans } U \text{ d'origine } \alpha(1)\}.$$

Montrez que l'ensemble $\{\Omega(U, \alpha)\}_{(U, \alpha) \in \mathcal{P}}$ est une base pour une topologie sur \widetilde{B} . Dans la suite, on munit \widetilde{B} de la topologie définie par cette base. Montrez que $\widetilde{p}: \widetilde{B} \rightarrow B$ est continue.

- Soient $b \in B$ et U un voisinage ouvert connexe par arcs de b tel que le morphisme $\pi_1(U, b) \rightarrow \pi_1(B, b)$ induit par l'inclusion soit trivial. Montrer que U est trivialisant pour \widetilde{p} . En déduire que \widetilde{p} est un revêtement.
- Soit $\alpha \in C$. Montrer que l'application $\widetilde{\alpha}: [0, 1] \rightarrow \widetilde{B}$, définie par $\widetilde{\alpha}(s) = [\alpha_s]$ où $\alpha_s(t) = \alpha(ts)$, est un relèvement de α d'origine $[c_0]$ et d'extrémité $[\alpha]$, où c_0 est le chemin de B constant égal à b_0 .
- Montrer que $(\widetilde{p})_*(\pi_1(\widetilde{B}, [c_0]))$ est trivial. En déduire que \widetilde{B} est simplement connexe.