Université de Lille 1 Sciences et Technologies

2015/16 - Master 1 - M414

Devoir surveillé n°1 - Durée : 2h00

Exercice 1. (Question de cours)
a. Qu'est-ce la *topologie quotient* ?
b. Qu'est-ce qu'une *homotopie relativement à une partie* ?

Exercice 2. (Suspension d'un espace topologique)
La *suspension* d'un espace topologique X est l'espace quotient

$$\Sigma(X) = X \times [0,1]/\mathcal{R}$$

où $\mathcal{R}$ est la relation d'équivalence sur $X \times [0,1]$ dont les classes d'équivalence sont $X \times \{0\}$, $X \times \{1\}$ et les singletons $\{(x,t)\}$ pour $(x,t) \in X \times]0,1[$.
Montrer que $\Sigma(S^{n-1})$ est homéomorphe à S^n pour tout $n \geq 1$.
[*Indication :* considérer l'application $(x,t) \in S^{n-1} \times [0,1] \mapsto (\sin(\pi t)x, \cos(\pi t)) \in S^n$.]

Exercice 3. (Groupe topologique quotient)
Soit H un sous-groupe distingué d'un groupe topologique G. Montrer que le groupe G/H, muni de la topologie quotient, est un groupe topologique.

Exercice 4. (Vrai ou faux)
Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses.
Justifier la réponse par une courte preuve ou un contre-exemple.
a. Il existe deux applications continues d'un même espace vers $\mathbb{R}^2$ qui ne sont pas homotopes.
b. Il existe deux applications continues d'un même espace vers $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ qui ne sont pas homotopes.
c. Tout ensemble muni de la topologie discrète est simplement connexe.

Exercice 5. (Logarithme complexe)
Le but de l'exercise est de montrer qu'il n'existe pas d'application continue $\log \colon \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ telle que

$$\log(1) = 0 \quad \text{et} \quad \exp(\log(z)) = z \ \text{ pour tout } z \in \mathbb{C}^*,$$

où exp est l'exponentielle complexe. Pour cela, on suppose qu'une telle application log existe.
a. Determiner $\pi_1(\mathbb{C}, 0)$.
b. Montrer que S^1 est un rétract par déformation de $\mathbb{C}^*$. En déduire $\pi_1(\mathbb{C}^*, 1)$.
c. Déterminer les morphismes de groupes $\exp_*$ et $\log_*$ induits en homotopie.
d. Conclure.