Université de Lille 1 SCIENCES ET TECHNOLOGIES

2015/16 - Master 1 - M414

Devoir surveillé n°2 - Durée : 3h00

Exercice 1. (Questions de cours)
a. Qu'est-ce qu'une *homotopie relativement à une partie* ?
b. Qu'est-ce qu'une *equivalence d'homotopie* ?
c. Enoncer le *théorème de classification des surfaces compactes connexes*.

Exercice 2. (Quotient de $]0,+\infty[$ par $\mathbb{Z}$)
Soit $a \in]0,1[$. On considère l'action de $\mathbb{Z}$ sur $]0,+\infty[$ définie pour tous $n \in \mathbb{Z}$ et $x \in]0,+\infty[$ par

$$n \cdot x = a^n x.$$

Montrer que $]0,+\infty[/\mathbb{Z}$ est homéomorphe à S^1.
[*Indication :* considérer l'application $x \in]0,+\infty[\mapsto \exp(2i\pi \log_a(x)) \in S^1$.]

Exercice 3. (Sous-groupes distingués discrets)
Soit H un sous-groupe distingué discret d'un groupe topologique connexe G. Le but de l'exercice est de montrer que H est abélien.
a. Montrer que les parties connexes non vides d'une espace topologique discret sont les singletons.
b. Soit $h \in H$. Montrer que l'application $G \to H, \quad g \mapsto ghg^{-1}$ est bien définie et continue.
c. Conclure.

Exercice 4. (Applications de la sphère sans point fixe)
Soient $n \geq 1$ et $f : S^n \to S^n$ une application continue sans point fixe, c'est-à-dire telle que $f(x) \neq x$ pour tout $x \in S^n$. Le but de l'exercice est de montrer que f est homotope à l'application antipodale $g : S^n \to S^n$ définie par $g(x) = -x$ pour tout $x \in S^n$.
a. Soient $x, y \in S^n$ tels que $y \neq -x$. Montrer que l'application

$$[0,1] \to S^n, \qquad t \mapsto \frac{(1-t)x + ty}{||(1-t)x + ty||}$$

est un chemin bien défini dans S^n qui relie x à y.
b. Conclure en construisant une homotopie de f à g.

Exercice 5. (Vrai ou faux)
Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses.
Justifier la réponse par une courte preuve ou un contre-exemple.
a. Toute application continue injective $i : X \to Y$, où X et Y sont des espaces topologiques compacts, induit un homéomorphisme entre X et son image $i(X)$.
b. Toute application continue injective induit une morphisme injectif entre les groupes fondamentaux.

Exercice 6. (Union finie d'ouverts convexes)
Soient m et n des entiers ≥ 1 et $C_1, \ldots, C_n$ des parties ouvertes convexes non vides de $\mathbb{R}^m$ telles que $C_i \cap C_j \cap C_k \neq \emptyset$ pour tous $1 \leq i, j, k \leq n$. Le but de l'exercice est de montrer que l'union $C_1 \cup \cdots \cup C_n$ est simplement connexe.
a. Montrer que $C_1 \cup \cdots \cup C_n$ est connexe par arcs.
b. Montrer que le résultat est vrai pour $n = 1$.
c. Montrer que si $n \geq 2$, alors $(C_1 \cup \cdots \cup C_{n-1}) \cap C_n$ est connexe par arcs.
d. Conclure en effectuant une récurrence sur n.

Exercice 7. (Groupe fondamental d'une variété épointée)
Soit X une variété topologique connexe de dimension $d \geq 3$. Soient Σ une partie finie de X et $x \in X \setminus \Sigma$. Le but de l'exercice est de montrer que $\pi_1(X \setminus \Sigma, x) \cong \pi_1(X, x)$.
a. Montrer que $X \setminus \Sigma$ est une variété topologique connexe de dimension d.
b. En déduire que l'on peut se restreindre au cas où Σ est un singleton.
c. Conclure en utilisant le théorème de Van Kampen.

Exercice 8. (Invariance du domaine)
Soit $n > 2$. Le but de l'exercice est de montrer qu'un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$ n'est jamais homéomorphe à un ouvert non-vide de $\mathbb{R}^2$. Ce résultat est un cas particulier du théorème d'invariance du domaine : lorsque $m \neq n$, deux ouverts non vides de $\mathbb{R}^m$ et $\mathbb{R}^n$ ne sont jamais homéomorphes.
Supposons qu'il existe un homéomorphisme $h \colon U \to V$ entre un ouvert non vide U de $\mathbb{R}^n$ et un ouvert non vide V de $\mathbb{R}^2$. Soit $x \in U$. On pose $y = h(x) \in V$.
a. Montrer qu'il existe une boule ouverte B_1 centrée en x dans U et des boules ouvertes B_2, B_3 centrées en y dans V telles que $B_3 \subset h(B_1) \subset B_2$.
b. Soit $y_0 \in B_3 \setminus \{y\}$. On pose $x_0 = h^{-1}(y_0) \in B_1$ et on considère les applications

$$B_3 \setminus \{y\} \xrightarrow{h^{-1}} B_1 \setminus \{x\} \xrightarrow{h} B_2 \setminus \{y\}$$

obtenues par (co)restriction de l'homéomorphisme h et de son inverse. Déterminer les morphismes de groupes induits :

$$\pi_1(B_3 \setminus \{y\}, y_0) \xrightarrow{(h^{-1})_*} \pi_1(B_1 \setminus \{x\}, x_0) \xrightarrow{h_*} \pi_1(B_2 \setminus \{y\}, y_0).$$

c. Conclure.