TD1 - Topologie générale

Exercice 1.
Soit X un ensemble. Vérifier que l'ensemble vide et les complémentaires de parties finies de X forment une topologie sur X, appelée *topologie cofinie*.

Exercice 2. (Topologie engendrée)
Soient X un ensemble et $\mathcal{B}$ un ensemble de parties de X. Montrer qu'il existe une plus petite (au sens de l'inclusion) topologie sur X contenant $\mathcal{B}$, appelée la *topologie engendrée par* $\mathcal{B}$.

Exercice 3. (Base pour une topologie)
Soit X un ensemble. Une *base pour une topologie sur* X est un ensemble $\mathcal{B}$ de parties de X tel que

(a) pour tout $x \in X$, il existe $B \in \mathcal{B}$ contenant x ;
(b) pour tous $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ et tout $x \in B_1 \cap B_2$, il existe $B_3 \in \mathcal{B}$ tel que $x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

a. Montrer la topologie engendrée par une telle base $\mathcal{B}$ est l'ensemble des parties U de X vérifiant les conditions équivalentes suivantes :
(i) U est une réunion de d'éléments de $\mathcal{B}$;
(ii) pour tout $x \in U$, il existe $B \in \mathcal{B}$ tel que $x \in B \subset U$.

b. Montrer que l'ensemble des boules ouvertes d'espace métrique (X, d) est une base pour une topologie sur X. La topologie sur X engendrée par cette base s'appelle la *topologie induite par la distance* d.

Exercice 4. (Base d'une topologie)
Soit X un espace topologique. Une *base pour la topologie de* X est une base pour une topologie sur X qui engendre la topologie de X.

a. Soit $\mathcal{B}$ un ensemble d'ouverts de X. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
(i) $\mathcal{B}$ est une base pour la topologie de X ;
(ii) pour tout ouvert U de X et tout $x \in U$, il existe $B \in \mathcal{B}$ tel que $x \in B \subset U$;
(iii) les ouverts de X sont les réunions d'ouverts dans $\mathcal{B}$.

b. Soient X, Y des espaces topologiques et $\mathcal{B}$ une base pour la topologie de Y. Montrer qu'une application $f : X \to Y$ est continue si et seulement si pout tout $B \in \mathcal{B}$, $f^{-1}(B)$ est un ouvert de X.

Exercice 5.
Soient $\mathcal{B}$ l'ensemble des intervalles ouverts $]a, b[$ et $\mathcal{B}'$ l'ensemble des intervalles demi-ouverts $[a, b[$, où a, b sont des nombres réels tels que $a < b$. Montrer que $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont des bases pour une topologie sur $\mathbb{R}$. Comparer les topologies sur $\mathbb{R}$ qu'elles engendrent.

Exercice 6. (Topologie produit)
Soient X et Y deux espaces topologiques. On munit $X \times Y$ du la *topologie produit*, c'est-à-dire de la topologie engendrée par la base $\mathcal{B} = \{U \times V \mid U \text{ ouvert de } X, V \text{ ouvert de } Y\}$.

a. Verifier que $\mathcal{B}$ est bien une base pour une topologie sur $X \times Y$.

b. Montrer que les projections $p_1 : X \times Y \to X$ et $p_2 : X \times Y \to Y$ sont continues.

c. Montrer qu'une application $f : Z \to X \times Y$, où Z est un espace topologique, est continue si et seulement si les deux applications $p_1 f : Z \to X$ et $p_2 f : Z \to Y$ sont continues.

d. Il est faux de conjecturer qu'une application $f : X \times Y \to Z$ est continue si elle est continue en chaque variable séparément. Vérifier cela en considérant la fonction $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $F(0, 0) = 0$ et $F(x, y) = xy/(x^2 + y^2)$ si $(x, y) \neq (0, 0)$.

Exercice 7. (Espaces topologiques séparés)
Un espace topologique est *séparé* si deux points distincts de l'espace admettent toujours des voisinages ouverts disjoints.

a. Montrer qu'un espace topologique X est séparé si et seulement si la diagonale $\Delta = \{(x, x) \mid x \in X\}$ est un fermé de $X \times X$.

b. Montrer que le produit de deux espaces topologiques séparés est séparé.

c. Soit $f : X \to Y$ une application continue avec Y séparé. Montrer que le *graphe* de f, défini comme l'ensemble $\Delta_f = \{(x, f(x)) \mid x \in X\}$, est un fermé de $X \times Y$.

Exercice 8. (Topologie induite)

a. Soient X un espace topologique, ayant $\mathcal{T}$ pour topologie, et A est une partie de X. Verifier que

$$\mathcal{T}_A = \{U \cap A \mid U \in \mathcal{T}\}$$

est une topologie sur A, appelée *topologie induite* sur A par X. Un *sous-espace topologique* de X est une partie de X munie de la topologie induite par X.

b. Soient X, Y des espaces topologiques, A un sous-espace topologique de X et B un sous-espace topologique de Y. Montrer que la topologie produit sur $A \times B$ coïncide avec la topologie induite sur $A \times B$ par $X \times Y$.

c. La boucle d'oreille hawaïenne est l'union $C = \cup_{n \geq 1} C_n$ des cercles C_n de centre $(1/n, 0)$ et de rayon $1/n$. On munit C de la topologie induite par $\mathbb{R}^2$. Montrer que l'application $f : C \to C$, définie par $f(x, y) = (nx, ny)$ pour $(x, y) \in C_n$, n'est pas continue.

Exercice 9. (Topologie de Zariski)
Soit $\mathcal{P} = \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ l'anneau des polynômes à n variables. A tout idéal I de $\mathcal{P}$, on associe l'ensemble

$$Z(I) = \{ (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{C}^n \mid P(a_1, \ldots, a_n) = 0 \text{ pour tout } P \in I \}.$$

a. Montrer que les ensembles $Z(I)$ définissent l'ensemble des fermés d'une topologie sur $\mathbb{C}^n$, appelée *topologie de Zariski*.

b. Vérifier que pour $n = 1$, la topologie de Zariski coïncide avec la topologie cofinie (voir l'exercice 1).

c. Montrer que $\mathcal{B} = \{B_P \mid P \in \mathcal{P}\}$, où

$$B_P = \mathbb{C}^n \setminus Z((P)) = \{ (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{C}^n \mid P(a_1, \ldots, a_n) \neq 0 \},$$

est une base de la topologie de Zariski.

d. Observer que la topologie de Zariski n'est pas séparée : deux ouverts non-vides se rencontrent obligatoirement.

Exercice 10.
Montrer que les homéomorphismes $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont les bijections monotones de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
[*Indication :* utiliser le théorème des valeurs intermédiaires pour montrer qu'une application continue injective $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est monotone.]

Exercice 11.
Montrer qu'une application bijective continue n'est pas forcément un homéomorphisme.

Exercice 12. (Connexité)

a. Soit X un espace topologique. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) pour tous ouverts U, V de X, si $U \cap V = \emptyset$ et $U \cup V = X$, alors $U = \emptyset$ ou $V = \emptyset$;

(ii) pour tous fermés F, G de X, si $F \cap G = \emptyset$ et $F \cup G = X$, alors $F = \emptyset$ ou $G = \emptyset$;

(iii) les parties de X ouvertes et fermées sont $\emptyset$ et X ;

(iv) toute application continue $f : X \to \{0, 1\}$ est constante, où $\{0, 1\}$ est munie de la topologie discrète.

Un tel espace topologique X est dit *connexe*.

b. Une partie C d'un espace topologique est *connexe* si C munie de la topologie induite est un espace topologique connexe. Montrer qu'une partie C d'un espace topologique X est connexe si et seulement si pour tous ouverts U, V de X tels que $U \cap V \cap C = \emptyset$ et $C \subset U \cup V$, on a : $C \subset U$ ou $C \subset V$.

c. Montrer que l'image d'une partie connexe par une application continue est connexe.
d. Montrer que l'union de parties connexes d'un espace topologique ayant un point en commun est connexe.
e. Montrer que le produit de deux espaces topologiques connexes est connexe.
f. Montrer que si C est une partie connexe d'un espace topologique X, alors toute partie A de X telle que $C \subset A \subset \overline{C}$ est connexe.

Exercice 13.
Montrer que les parties connexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.

Exercice 14. (Connexité par arc)
Un espace topologique X est *connexe par arcs* si pour tous $x, y \in X$, il existe un *chemin* reliant x à y, c'est-à-dire une application continue $\gamma\colon [0,1] \to X$ telle que $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$. Une partie C d'un espace topologique est *connexe par arcs* si C munie de la topologie induite est un espace topologique connexe par arcs.
a. Montrer qu'un espace topologique connexe par arcs est connexe.
b. Montrer que l'image d'une partie connexe par arcs par une application continue est connexe par arcs.
c. Montrer que le produit de deux espaces topologiques connexes par arcs est connexe par arcs.

Exercice 15.
Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est connexe.
[*Indication :* pour $A, B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, considérer l'application $t \mapsto \det(tA + (1-t)B)$ et ses zéros.]

Exercice 16.
L'intervalle $[0,1]$ et le carré $[0,1] \times [0,1]$ sont-ils homéomorphes ?

Exercice 17.
Montrer que l'adhérence de $\{(x, \sin(1/x)) \mid x > 0\} \subset \mathbb{R}^2$ est connexe mais n'est pas connexe par arcs.

Exercice 18. (Composantes connexes et composantes connexes par arcs)
Soit X un espace topologique. Les *composantes connexes* de X sont les classes d'équivalences de la relation d'équivalence sur X définie par $x \sim y$ s'il existe une partie connexe de X contenant x et y. Les *composantes connexes par arcs* de X sont les classes d'équivalences de la relation d'équivalence sur X définie par $x \sim_a y$ s'il existe un chemin reliant x à y.
a. Montrer que les composantes connexes de X sont des parties fermées connexes disjointes dont l'union est X, et que toute partie connexe non vide de X est contenue dans une unique composante connexe.
b. Montrer que les composantes connexes par arcs de X sont des parties connexes par arcs disjointes dont l'union est X, et que toute partie connexe par arcs non vide de X est contenue dans une unique composante connexe par arcs.
c. Montrer que toute composante connexe par arcs de X est contenue dans une unique composante connexe de X.
d. Montrer que si X est localement connexe par arcs (i.e., admet une base d'ouverts connexes par arcs), alors les composantes connexes par arcs de X sont les composantes connexes de X.

Exercice 19.
Montrer que si un espace topologique X est une réunion disjointe d'ouverts connexes, alors les composnates connexes de X sont ces ouverts connexes.

Exercice 20.
Déterminer le nombre de composantes connexes du sous-espace topologique de $\mathbb{R}^2$ suivant :
$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 = x(x-1)(x-2)\}.$$