2015/16 - Master 1 - M414

TD2 - Topologie quotient

Exercice 1.
Les groupes topologiques $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ sont-ils compacts ? connexes ?
Même question pour $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, $\mathrm{U}_n(\mathbb{C})$, $\mathrm{SU}_n(\mathbb{C})$.

Exercice 2. (Projection stéréographique)
Soit $N = (0, \ldots, 0, 1)$ le pole nord de la sphère $S^n = \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_1^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 1\}$. La *projection stéréographique de pole* N est l'application $p\colon S^n \setminus \{N\} \to \mathbb{R}^n$ qui associe à tout $x \in S^n \setminus \{N\}$ l'unique point $p(x)$ de $\mathbb{R}^n$ tel que les points N, x, et $(p(x), 0)$ soient alignés dans $\mathbb{R}^{n+1}$.
a. Calculer $p(x)$ pour tout $x = (x_1, \ldots, x_{n+1}) \in S^n \setminus \{N\}$.
On fera un dessin illustrant la situation dans le cas $n = 2$.
b. Montrer que p est un homéomorphisme.

Exercice 3. (Cônes d'espaces topologiques)
Le *cône* d'un espace topologique X est l'espace quotient $C(X) = X \times [0, 1]/X \times \{0\}$.
Montrer que $C(S^{n-1}) \cong B^n$.
[*Indication :* on pourra utiliser l'application $(x, t) \in S^{n-1} \times [0, 1] \mapsto tx \in B^n$.]

Exercice 4.
Montrer que la sphère S^3 est obtenue en recollant les tores pleins $S^1 \times B^2$ et $B^2 \times S^1$ le long de leur bord commun $S^1 \times S^1$.
[*Indication :* montrer que $A = \{(x, y, z, t) \in S^3 \mid x^2 + y^2 \geq 1/2\}$ et $B = \{(x, y, z, t) \in S^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1/2\}$ sont homéomorphes à des tores pleins.]

Exercice 5. (Espaces projectifs)
Soient $\mathbb{K}$ un corps et $n \geq 1$. L'*espace projectif sur* $\mathbb{K}$ *dimension* n est le quotient

$$\mathbb{KP}^n = (\mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\})/\mathbb{K}^*$$

où $\mathbb{K}^*$ agit par multiplication scalaire. La classe de $(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\}$ se note $[x_1, \ldots, x_{n+1}]$. Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on munit $\mathbb{KP}^n$ de la topologie quotient.
a. Montrer que

$$\mathbb{RP}^n \cong S^n/\mathbb{Z}_2 \cong B^n/\mathcal{R},$$

où $\mathbb{Z}_2 = \{1, -1\}$ agit sur $S^n = \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_1^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 1\}$ par multiplication scalaire et $\mathcal{R}$ est la relation d'équivalence sur $B^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + \cdots + x_n^2 \leq 1\}$ définie par $y\mathcal{R}x$ si $y = x$ ou ($x \in S^{n-1}$ et $y = -x$).
b. Montrer que

$$\mathbb{CP}^n \cong S^{2n+1}/S^1 \cong B^{2n}/\mathcal{R},$$

où $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ agit sur $S^{2n+1} = \{(z_1, \ldots, z_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1} \mid |z_1|^2 + \cdots + |z_{n+1}|^2 = 1\}$ par multiplication scalaire et $\mathcal{R}$ est la relation d'équivalence sur $B^{2n} = \{(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n \mid |z_1|^2 + \cdots + |z_n|^2 \leq 1\}$ définie par $y\mathcal{R}x$ si $y = x$ ou ($x \in S^{2n-1}$ et il existe $\lambda \in S^1$ tel que $y = \lambda x$).
c. Montrer que $\mathbb{CP}^n$ et $\mathbb{RP}^n$ sont compacts.
d. Montrer que $\mathbb{CP}^1 \cong S^2$. En déduire que $S^3/S^1 \cong S^2$.

Exercice 6. (Décomposition celllulaire des espaces projectifs)
Un *carré cocartésien* d'espaces topologiques est un carré

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & X \arrow[d, "i"] \\ Y \arrow[r, "j"'] & Z \end{tikzcd}$$

où A, X, Y, Z sont des espcaces topologiques et f, g, i, j sont des applications continues, qui est commutatif (c'est-à-dire, $if = jg$) et tel que pour tout espace topologique W et toutes applications continues $h\colon X \to W$ et $l\colon Y \to W$ vérifiant $hf = lg$, il existe une unique application continue $\phi\colon Z \to W$ telle que $h = \phi i$ et $l = \phi j$. On rappelle que Z est alors homéomorphe à l'espace topologique $X \cup_{f,g} Y$ obtenu en recollant X et Y le long de f et g.

a. Utiliser les projections canoniques $p_{n-1}\colon S^{n-1} \to \mathbb{RP}^{n-1}$ et $q_{n-1}\colon S^{2n-1} \to \mathbb{CP}^{n-1}$ de l'exercice 5 et les inclusions $S^{n-1} \hookrightarrow B^n$ pour construire des carrés cocartésiens :

$$\begin{tikzcd} S^{n-1} \arrow[r, "p_{n-1}"] \arrow[d, hook] & \mathbb{RP}^{n-1} \arrow[d] \\ B^n \arrow[r] & \mathbb{RP}^n \end{tikzcd} \qquad \text{et} \qquad \begin{tikzcd} S^{2n-1} \arrow[r, "q_{n-1}"] \arrow[d, hook] & \mathbb{CP}^{n-1} \arrow[d] \\ B^{2n} \arrow[r] & \mathbb{CP}^n \end{tikzcd}$$

b. En déduire que $\mathbb{RP}^n \cong \mathbb{RP}^{n-1} \cup_{p_{n-1}} B^n$ et $\mathbb{CP}^n \cong \mathbb{CP}^{n-1} \cup_{q_{n-1}} B^{2n}$.

c. Déterminer une décomposition cellulaire de $\mathbb{RP}^n$ et $\mathbb{CP}^n$.

Exercice 7.
Montrer que $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ n'est pas séparé, où $\mathbb{Q}$ agit sur $\mathbb{R}$ par translation.

Exercice 8.
Soient G un groupe topologique séparé et H un sous-groupe de G.
Montrer que l'espace des orbites $G/H = \{gH \mid g \in G\}$ est séparé si et seulement si H est fermé.

Exercice 9. (Exponentielle d'espaces topologiques)
Etant donés des espaces topologiques X et Y, on note par $C(X, Y)$ l'ensemble des applications continues de X vers Y, et par Y^X l'espace topologique d'ensemble sous-jacent $C(X, Y)$ et muni de la topologie dite *compacte-ouverte*, c'est-à-dire engendrée par les ensembles

$$W(K, U) = \{f \in C(X, Y) \,\big|\, f(K) \subset U\}$$

où K est un compact de X et U un ouvert de Y.
Soient X, Y, Z des espaces topologiques. On considère l'application

$$\Phi\colon C(Z \times X, Y) \to C(Z, Y^X)$$

définie par $\Phi(f)(z) = f_z \in Y^X$ pour tous $f \in C(Z \times X, Y)$ et $z \in Z$, où $f_z(x) = f(z, x)$ pour tour $x \in X$.

a. Montrer que l'application Φ est bien définie et injective.

b. Montrer que si X est localement compact (i.e., X est séparé et tout point de X admet un voisinage compact) alors l'application Φ est bijective.
[*Indication :* montrer que dans un espace topologique localement compact, tout voisinage d'un point contient un voisinage compact du point.]

Exercice 10. (Actions de groupes topologiques)
Soient G un groupe topologique et X un espace topologique. Soit $\mathrm{Homeo}(X)$ l'ensemble des homéomorphismes de X vers X muni de la topologie compacte-ouverte (voir l'exercice précédent).

a. Montrer que toute action continue de G sur X induit un morphisme de groupes continu de G vers $\mathrm{Homeo}(X)$.

b. Montrer que si X est localement compact, alors tout morphisme de groupes continu $\varphi\colon G \to \mathrm{Homeo}(X)$ définit une unique action continue de G sur X telle que φ soit le morphisme de groupes induit.