2015/16 - Master 1 - M414

TD3 - Homotopie

Exercice 1. (Type d'homotopie)
Montrer que les espaces topologiques suivants ont même type d'homotopie.
a. Un espace topologique X et le produit $X \times [0,1]$.
b. Le cercle S^1 et le complémentaire d'un cercle dans S^3.
c. Le groupe orthogonal $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et le groupe linéaire $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.
[*Indication :* voir l'orthogonalisation de Gram-Schmidt comme une rétraction par déformation.]

Exercice 2. (Type d'homotopie vs rétract par déformation)
Montrer que l'union de deux cercles tangents et l'union d'un carré (vide) avec l'une de ses diagonales ont même type d'homotopie, mais qu'aucun de ces deux espaces topologiques n'est homéomorphe à un rétract par déformation de l'autre.

Exercice 3. (Type d'homotopie et connnexité par arcs)
Soient X, Y deux espaces topologiques ayant le même type d'homotopie.
Montrer que si X est connexe par arcs, alors Y l'est également.

Exercice 4. (Contractilité des cônes)
Montrer que le cône $C(X) = X \times [0,1]/X \times \{0\}$ d'un espace topologique non vide X est contractile.

Exercice 5. (Prolongement d'applications)
Soient X et Y des espaces topologiques non vides. On identifie X avec la base du cône $C(X)$, c'est-à-dire avec l'image de $X \times \{1\}$ par la projection canonique $X \times [0,1] \to C(X)$.
a. Montrer qu'une application continue $f : X \to Y$ se prolonge en une application continue $C(X) \to Y$ si et seulement si f est homotope à une application constante.
b. En déduire qu'une application continue $S^n \to Y$ se prolonge en une application continue $B^{n+1} \to Y$ si et seulement si elle est homotope à une application constante.

Exercice 6. (Homotopie et composantes connexes par arcs)
Soit X un espace topologique. Déterminer une bijection entre l'ensemble $[\{*\}, X]$ des classes d'homotopie d'applications d'un singleton $\{*\}$ vers X et l'ensemble $\pi_0(X)$ des composantes connexes par arcs de X.

Exercice 7. (Fermeture des rétracts)
Montrer qu'un rétract d'un espace séparé est un fermé.

Exercice 8. (Rétract non par déformation)
Soit P une partie non vide de B^{n+1} telle que $P \cap S^n = \emptyset$. Montrer que S^n est un rétract de $B^{n+1} \setminus P$.
Construire un exemple de rétract qui n'est pas un rétract par déformation.

Exercice 9. (Rétracts et groupe fondamental)
Soient A un rétract d'un espace topologique X et $a \in A$.
On choisit une rétraction $r : X \to A$ de l'inclusion $i : A \hookrightarrow X$.
a. Montrer que les morphismes de groupes $i_* : \pi_1(A,a) \to \pi_1(X,a)$ et $r_* : \pi_1(X,a) \to \pi_1(A,a)$ induits par i et r sont respectivement injectif et surjectif.
b. Montrer que si $i_*(\pi_1(A,a))$ est distingué dans $\pi_1(X,a)$, alors $\pi_1(X,a) \cong \pi_1(A,a) \times \mathrm{Ker}(r_*)$.
[*Indication :* remarquer que si $p : G \to H$ et $q : H \to G$ sont des morphismes de groupes tels que $q(H)$ soit distingué dans G et $pq = \mathrm{id}_H$, alors l'application $H \times \mathrm{Ker}(p) \to G$, $(h,g) \mapsto q(h)g$, est un isomorphisme de groupes.]

Exercice 10. (Composante connexe et groupe fondamental)
Soient X un espace topologique et $x_0 \in X$. Notons C la composante connexe par arcs de x_0.
Montrer que l'inclusion $C \hookrightarrow X$ induit un isomorphisme de groupes $\pi_1(C, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$.

Exercice 11. (Groupe fondamental des groupes topologiques)
a. *Principe d'Eckmann-Hilton.*
Soit M un ensemble muni de deux produits, i.e., deux applications $*\colon M\times M \to M$ et $\circ\colon M\times M \to M$, admettant une unité commune et vérifiant pour tous $a, b, c, d \in M$,

$$(a * b) \circ (c * d) = (a \circ c) * (b \circ d).$$

Montrez que les produits $*$ et $\circ$ sont égaux et que $* = \circ$ est associatif et commutatif.
b. Montrez que le groupe fondamental $\pi_1(G, 1)$ d'un groupe topologique G est commutatif.

Exercice 12. (Commutativité du groupe fondamental)
Soit X un espace topologique connexe par arcs. On rappelle que tout chemin (dans X) d'un point $x \in X$ à un point $y \in X$ induit un isomorphisme de groupes $\pi_1(X, x) \to \pi_1(X, y)$.
Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
a. Le groupe fondamental $\pi_1(X, x)$ est commutatif pour un (et donc tout) $x \in X$;
b. Pour tous $x, y \in X$, les chemins de x à y définissent le même isomorphisme $\pi_1(X, x) \to \pi_1(X, y)$.

Exercice 13. (Groupe fondamental et espace des lacets)
Soient X un espace topologique et $x_0 \in X$. On rappelle qu'un lacet de X basé en x_0 est une application continue $\alpha\colon [0, 1] \to X$ telle que $\alpha(0) = \alpha(1) = x_0$. On munit l'ensemble $\Omega(X, x_0)$ des lacets de X basés en x_0 de la topologie dite *compacte-ouverte*, c'est-à-dire engendrée par les ensembles

$$W(K, U) = \{\alpha \in \Omega(X, x_0) \,|\, \alpha(K) \subset U\}$$

où K est un compact de $[0, 1]$ et U est un ouvert de X. L'ensemble des composantes connexes par arcs d'un espace topologique Y se note $\pi_0(Y)$. Le but de l'exercice est de montrer que

$$\pi_1(X, x_0) = \pi_0(\Omega(X, x_0)).$$

a. Montrer que deux lacets α, β de X basés en x_0 sont homotopes (à extrémités fixes) si et seulement s'il existe un chemin (continu) dans $\Omega(X, x_0)$ reliant α à β.
[*Indication :* relier une homtopie H de α à β et un chemin Γ dans $\Omega(X, x_0)$ de α à β par $\Gamma(t) = H(\cdot, t)$.]
b. Conclure.