

Exercice 1. (Groupes par générateurs et relations)

a. Reconnaître le groupe

$$\langle a, b, c, d, e \mid d = e^2, bda = 1, ab^{-1}c = 1, bc = a, de = c \rangle.$$

b. Montrer que les groupes suivants sont isomorphes

$$\langle a, b \mid aba = b \rangle \quad \text{et} \quad \langle x, y \mid x^2y^2 = 1 \rangle.$$

c. Montrer que les groupes suivants ne sont pas isomorphes

$$\langle a, b \mid ba^2b^3 = a, abab^2 = 1 \rangle \quad \text{et} \quad \langle x, y \mid y^3xy = x, x^5y = y^3x^2 \rangle.$$

Exercice 2. (Somme amalgamée triviale)

Montrer que la somme amalgamée $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) *_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ de $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ au dessus de \mathbb{Z} le long des surjections canoniques $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est le groupe trivial.

Exercice 3. (Espaces correctement pointés)

Soient X un espace topologique et $x_0 \in X$. On dit que X est *correctement pointé en* x_0 s'il existe un voisinage ouvert U de x_0 tel que l'identité $\text{id}_U: U \rightarrow U$ et l'application $c_{x_0}: U \rightarrow U$ constante égale à x_0 soient homotopes relativement à $\{x_0\}$. En particulier, $\{x_0\}$ est un rétract par déformation de U .

Montrer qu'un espace cellulaire X est correctement pointé en tout $x_0 \in X$.

Exercice 4. (Groupe fondamental d'un bouquet)

Soient X et Y des espace topologiques correctement pointés en $x_0 \in X$ et $y_0 \in Y$, respectivement. Notons $X \vee Y$ le bouquet de X et Y (obtenu de $X \sqcup Y$ en identifiant x_0 et y_0) et z_0 le point de $X \vee Y$ représentant x_0 et y_0 . Montrer que

$$\pi_1(X \vee Y, z_0) \cong \pi_1(X, x_0) * \pi_1(Y, y_0).$$

Exercice 5. (Bouquet de cercles)

Determiner le groupe fondamental d'un *bouquet* de n cercles, qui est la réunion de n cercles reliés tous ensemble en un seul point.

Exercice 6. (Attachement d'une cellule)

Soient X un espace topologique connexe par arcs et $f: S^{n-1} \rightarrow X$ une application continue. Notons $Y = X \cup_f B^n$ l'espace topologique obtenu en attachant à X une cellule B^n de dimension n le long de f . Soit $s_0 \in S^{n-1}$ et notons $x_0 = f(s_0) \in X$ et $y_0 = \overline{x_0} \in Y$. Le but de l'exercice est de montrer que

$$\pi_1(Y, y_0) \cong \begin{cases} \pi_1(X, x_0) * \mathbb{Z} & \text{si } n = 1 \text{ et } X \text{ est correctement pointé en } x_0, \\ \pi_1(X, x_0)/N_f & \text{si } n = 2, \\ \pi_1(X, x_0) & \text{si } n \geq 3, \end{cases}$$

où, dans le cas $n = 2$, le groupe N_f est le plus petit sous-groupe distingué de $\pi_1(X, x_0)$ contenant la classe d'homotopie du lacet de X défini par $t \in [0, 1] \mapsto f(e^{2\pi i t})$.

a. Supposons $n = 1$. Montrer que $f: S^0 \rightarrow X$ est homotope à l'application constante égale à x_0 . En déduire que Y a le même type d'homotopie que le bouquet $X \vee S^1$ obtenu en identifiant x_0 et $1 \in S^1$. Conclure en utilisant l'exercice 4.

b. Supposons désormais $n \geq 2$. Soient 0 le centre de la boule B^n et $p: B^n \sqcup X \rightarrow Y$ l'application quotient. On pose :

$$U = p((B^n \setminus \{0\}) \sqcup X) \quad \text{et} \quad V = p(B^n \setminus S^{n-1}).$$

Montrer que U , V , et $U \cap V$ sont des ouverts de Y connexes par arcs.

c. Montrer que V est simplement connexe.

- d. Montrer que $U \cap V$ est un rétract par déformation de $p(S_{1/2}^{n-1})$, où $S_{1/2}^{n-1} \subset B^n$ est la sphère de centre 0 et de rayon $1/2$.
- e. Montrer que $p(X)$ est un rétract par déformation de U via une rétraction $r: U \rightarrow p(X)$ telle que $rp(x/2) = pf(x)$ pour tout $x \in S^{n-1}$.
- f. En déduire qu'il existe un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(S^{n-1}, s_0) & \xrightarrow{\cong} & \pi_1(U \cap V, p(s_0/2)) \\ f_* \downarrow & & \downarrow j_* \\ \pi_1(X, x_0) & \xleftarrow{\cong} & \pi_1(U, p(s_0/2)). \end{array}$$

- où les flèches horizontales sont des isomorphismes de groupes et $j: U \cap V \hookrightarrow U$ est l'inclusion.
- f. Conclure.

Exercice 7. (Bouteille de Klein)

Déterminer le groupe fondamental de la *bouteille de Klein* définie par

$$K = [0, 1]^2 / \mathcal{R},$$

où \mathcal{R} est la relation d'équivalence engendrée par $(s, 0) \sim (s, 1)$ et $(0, t) \sim (1, 1 - t)$ pour $s, t \in [0, 1]$.

Exercice 8. (Groupes fondamentaux des espaces projectifs complexes)

Montrer que les espaces projectifs complexes $\mathbb{C}P^n$ sont simplement connexes.

[Indication : utiliser les exercices 5.d et 6.b du TD2.]

Exercice 9. (Groupes fondamentaux des espaces projectifs réels)

Montrer que les groupes fondamentaux des espaces projectifs réels sont

$$\pi_1(\mathbb{R}P^1) \cong \mathbb{Z} \quad \text{et} \quad \pi_1(\mathbb{R}P^n) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \quad \text{pour } n \geq 2.$$

[Indication : montrer que $\mathbb{R}P^1 \cong S^1$ et conclure en utilisant l'exercice 6.b du TD2.]

Exercice 10. (Espaces lenticulaires)

Soient p et q deux entiers premiers entre eux. Notons σ la symétrie orthogonale de \mathbb{R}^3 par rapport au plan $z = 0$ et r la rotation de \mathbb{R}^3 de direction $(0, 0, 1)$ et d'angle $2\pi/p$. L'espace lenticulaire de type (p, q) est l'espace topologique quotient

$$L(p, q) = B^3 / \mathcal{R},$$

où \mathcal{R} est la relation d'équivalence sur B^3 engendrée par $x \sim \sigma(r^q(x))$ pour $x \in S^2$. Montrer que

$$\pi_1(L(p, q)) \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}.$$

[Indication : montrer que $L(p, q) \cong X \cup_f B^3$ où $X = S^2 / \mathcal{R}$ et $f: S^2 \rightarrow X$ est la projection canonique.]

Exercice 11. (Groupes de présentation finie comme groupes fondamentaux)

Montrer que tout groupe de présentation finie est le groupe fondamental d'un espace topologique.

[Indication : si $G \cong \langle g_1, \dots, g_m \mid r_1, \dots, r_n \rangle$, attacher n cellules B^2 au bouquet de m cercles.]