Université de Lille 1 Sciences et Technologies

2015/16 - Master 1 - M414

TD6 - Variétés

Exercice 1. (Connexité des variétés)
Montrer qu'une variété est connexe par arcs si et seulement si elle est connexe.

Exercice 2. (Variétés de dimension 1)
Montrer que toute variété compacte connexe de dimension 1 est homéomorphe au cercle S^1.

Exercice 3. (Espaces unitaires tangents)
a. L'*espace unitaire tangent* à S^n est le sous-espace topologique de $S^n \times \mathbb{R}^{n+1}$ défini par

$$T(S^n) = \{(x, y) \in S^n \times \mathbb{R}^{n+1} \mid y \text{ de norme 1 et orthogonal à } x\}.$$

Montrer que $T(S^n)$ est une variété de dimension $2n - 1$.
b. Montrer que $T(S^2) \cong \mathbb{RP}^3$.

Exercice 4. (Variétés et actions de groupes)
a. Montrer que le quotient $\mathbb{T}_n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ est une variété de dimension n, où $\mathbb{Z}^n$ agit sur $\mathbb{R}^n$ par translations.
b. Montrer que le quotient $H_n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}$ est une variété de dimension n, où $\mathbb{Z}$ agit sur $\mathbb{R}^n$ par

$$z \cdot (x_1, \ldots, x_n) = (2^z x_1, \ldots, 2^z x_n).$$

c. Montrer que $\mathbb{T}_n \cong (S^1)^n$ et $H_n \cong S^{n-1} \times S^1$.

Exercice 5. (Somme connexe de variétés)
a. Montrer que la somme connexe de deux variétés connexes de dimension n est une variété connexe de dimension n qui ne dépend pas, à homéomorphisme près, des choix faits pour sa construction.
b. Montrer que si M, N, P sont des variétés connexes de dimension n, alors

$$(M\#N)\#P \cong M\#(N\#P), \qquad M\#N \cong N\#M, \qquad M\#S^n \cong M.$$

Exercice 6. (Somme connexe de surfaces)
Soient $\mathbb{T} = S^1 \times S^1$ le tore, $\mathbb{RP}^2$ le plan projectif réel et $\mathcal{K}$ la bouteille de Klein.
Montrer que

$$\mathcal{K} \simeq \mathbb{RP}^2\#\mathbb{RP}^2 \qquad \text{et} \qquad \mathbb{T}\#\mathbb{RP}^2 \cong \mathbb{RP}^2\#\mathbb{RP}^2\#\mathbb{RP}^2.$$