Exercice 1. (Question de cours)

a. Qu'est-ce que la *topologie quotient* ?

b. Qu'est-ce qu'une *équivalence d'homotopie* ?

Exercice 2. (Cône d'un espace topologique)

Le cône d'un espace topologique X est l'espace quotient $C(X) = X\times[0,1]/X\times\{0\}$ obtenu en identifiant la partie $X\times\{0\}$ à un point.

a. Montrer que $C(S^{n-1}) \cong B^n$ pour tout $n \geq 1$, où

$$S^{n-1} = \{(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2+\cdots+x_n^2 = 1\} \quad \text{et} \quad B^n = \{(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2+\cdots+x_n^2 \leq 1\}.$$

Indication : on pourra utiliser l'application $(x,s) \in S^{n-1}\times[0,1] \mapsto sx \in B^n$ pour construire un homéomorphisme de $C(S^{n-1})$ vers B^n

b. Montrer que le cône d'un espace topologique est contractile.

Indication : on pourra utiliser l'application $(x,s,t) \in X\times[0,1]\times[0,1] \mapsto (x,st) \in X\times[0,1]$ pour construire une homotopie $C(X)\times[0,1] \to C(X)$.

Exercice 3. (Sous-groupe distingué discret)

Montrer que tout sous-groupe distingué discret d'un groupe topologique connexe est abélien.

Exercice 4. (Vrai ou faux)

Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses.

Justifier la réponse par une courte preuve ou un contre-exemple.

a. Toute injection continue $i\colon X \to Y$ induit un homéomorphisme entre X et son image $i(X)$.

b. Toute application continue injective induit un morphisme injectif entre les groupes fondamentaux.

c. Le carré $[0,1]\times[0,1]$ est simplement connexe.

Exercice 5. (Théorème du point fixe de Brouwer pour le disque)

Le but de l'exercise est de montrer que toute application continue $f\colon B^2 \to B^2$ possède un point fixe.

a. Montrer qu'il n'existe pas de rétraction du disque B^2 sur le cercle S^1.

Indication : dans le cas contraire, considérer le morphisme induit entre les groupes fondamentaux.

b. Soit $f\colon B^2 \to B^2$ une application continue sans point fixe. Montrer l'application qui envoie $z \in B^2$ sur l'intersection de la demi-droite ouverte $]f(z),z)$ avec le cercle S^1 est une rétraction de B^2 sur S^1.

c. Conclure.