2016/17 - Master 1 - M414

Géométrie Différentielle et Topologie Algébrique

Examen (semestre 2, session 1) - Durée : 3h00

Exercice 1. (Question de cours)
a. Qu'est-ce qu'une *homotopie relativement à une partie* ?
b. Qu'est-ce que l'*homologie* d'un complexe de chaînes ?

Exercice 2. (Suspension d'un espace topologique)
La *suspension* d'un espace topologique X est l'espace quotient

$$\Sigma(X) = X \times [0,1]/\mathcal{R}$$

où $\mathcal{R}$ est la relation d'équivalence sur $X \times [0,1]$ dont les classes d'équivalence sont $X \times \{0\}$, $X \times \{1\}$ et les singletons $\{(x,t)\}$ pour $(x,t) \in X \times]0,1[$.
Montrer que $\Sigma(S^{n-1})$ est homéomorphe à S^n pour tout $n \geq 1$.
Indication : considérer l'application

$$(x,t) \in S^{n-1} \times [0,1] \mapsto (\sin(\pi t)x, \cos(\pi t)) \in S^n \subset \mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}.$$

Exercice 3. (Espace des configurations)
L'*espace des configurations de 2 points dans* $\mathbb{C}$ est le sous-espace topologique de $\mathbb{C}^2$ défini par

$$F_2 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \,|\, z_1 \neq z_2\}.$$

a. Montrer que F_2 a le même type d'homotopie que $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| = 1\}$.
Indication : montrer que les applications $\psi\colon S^1 \to F_2$ et $\phi\colon F_2 \to S^1$, définies par $\psi(z) = (z, 0)$ et $\phi(z_1, z_2) = (z_1 - z_2)/|z_1 - z_2|$, sont des équivalences d'homotopie inverses l'une de l'autre en explicitant des homotopies $\phi\psi \simeq \mathrm{id}_{S^1}$ et $\psi\phi \simeq \mathrm{id}_{F_2}$.
b. En déduire le groupe fondamental et les groupes d'homologie singulière de F_2.

Exercice 4. (Vrai ou faux)
Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses.
Justifier la réponse par une courte preuve ou un contre-exemple.
a. Tout ensemble non vide muni de la topologie discrète est contractile.
b. Tout ensemble non vide muni de la topologie grossière est contractile.
c. Toute application continue injective induit des morphismes injectifs en homologie.

Exercice 5. (Homologie du tore)
Le but de l'exercise est de calculer les groupes d'homologie du tore $\mathbb{T} = S^1 \times S^1$.
a. Calculer $H_0(\mathbb{T})$.
b. Calculer $\pi_1(\mathbb{T})$. En déduire $H_1(\mathbb{T})$, sachant que $H_1(\mathbb{T})$ est isomorphe à l'abélianisé de $\pi_1(\mathbb{T})$.
c. Soient a et b deux point distincts de S^1 et notons

$$U = S^1 \times (S^1 \setminus \{a\}) \quad \text{et} \quad V = S^1 \times (S^1 \setminus \{b\}).$$

Montrer que U et V sont des ouverts recouvrant $\mathbb{T}$ et ayant le même type d'homotopie que S^1.
d. Montrer que $U \cap V$ a le même type d'homotopie que $S^1 \amalg S^1$.
e. En utilisant la suite de Mayer-Vietoris, calculer d'abord $H_n(\mathbb{T})$ pour $n \geq 3$, puis calculer $H_2(\mathbb{T})$.

Exercice 6. (Homologie relative)
Soit (X, A) une paire d'espaces topologiques.
a. Ecrire la suite exacte longue d'homologie relative de la paire (X, A).
b. Calculer $H_n(B^n, S^{n-1})$ pour tout $n \geq 1$.
c. Notons $i\colon A \to X$ l'inclusion. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
(i) $H_n(i)\colon H_n(A) \to H_n(X)$ est un isomorphisme pour tout $n \in \mathbb{N}$;
(ii) $H_n(X, A) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.