

Exercice 1. (Groupes fondamentaux)

Déterminer le groupe fondamental du tore $S^1 \times S^1$, du tore solide $B^2 \times S^1$, du cylindre $S^1 \times [0, 1]$, du cylindre infini $S^1 \times \mathbb{R}$.

Exercice 2. (Logarithme complexe)

Le but de l'exercice est de montrer qu'il n'existe pas d'application continue $\log: \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}$ telle que

$$\log(1) = 0 \quad \text{et} \quad \exp(\log(z)) = z \quad \text{pour tout } z \in \mathbb{C}^*,$$

où \exp est l'exponentielle complexe. Pour cela, on suppose qu'une telle application \log existe.

- Déterminer $\pi_1(\mathbb{C}, 0)$.
- Montrer que S^1 est un rétract par déformation de \mathbb{C}^* . En déduire $\pi_1(\mathbb{C}^*, 1)$.
- Déterminer les morphismes de groupes \exp_* et \log_* induits en homotopie.
- Conclure.

Exercice 3. (Degré)

Le degré d'une application continue $f: S^1 \rightarrow S^1$ est

$$\deg(f) = \tilde{\alpha}(1) - \tilde{\alpha}(0),$$

où $\tilde{\alpha}: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ est un relèvement du lacet $\alpha: [0, 1] \rightarrow S^1$ défini par $\alpha(t) = f(e^{2i\pi t})$ le long du revêtement $p: \mathbb{R} \rightarrow S^1$ défini par $p(t) = e^{2i\pi t}$.

- Montrer que le degré de f est un entier qui ne dépend pas du choix du relèvement $\tilde{\alpha}$ de α .
- Montrer que si $f, g: S^1 \rightarrow S^1$ sont des applications continues homotopes, alors $\deg(f) = \deg(g)$.
- Montrer que $\deg(g \circ f) = \deg(g) \deg(f)$ pour toutes applications continues $f, g: S^1 \rightarrow S^1$.
- Pour $n \in \mathbb{Z}$, calculer le degré de l'application $f: S^1 \rightarrow S^1$ définie par $f(z) = z^n$.

Exercice 4. (Théorème fondamental de l'algèbre)

Le but de l'exercice est de montrer que toute équation

$$z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0 = 0$$

de degré $n \geq 1$ à coefficients complexes admet (au moins) une racine complexe.

Pour cela, on suppose que le polynôme $P(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0$ n'a pas de racine et on considère les applications $f: S^1 \rightarrow S^1$ et $G, H: S^1 \times [0, 1] \rightarrow S^1$ définies par

$$f(z) = \frac{P(z)}{|P(z)|}, \quad G(z, t) = \frac{P(tz)}{|P(tz)|}, \quad H(z, t) = \frac{t^n P(z/t)}{|t^n P(z/t)|}.$$

- Montrer que f est de degré nul en considérant G .
- Montrer que f est de degré n en considérant H .
- Conclure.

Exercice 5. (Théorème de Borsuk-Ulam)

Le but de l'exercice est de montrer que pour toute application continue $f: S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, il existe un point $x \in S^2$ tel que $f(x) = f(-x)$.

- Montrer que si $g: S^1 \rightarrow S^1$ est une application continue qui s'étend continûment au disque B^2 , alors g est de degré nul.
- Montrer que si $g: S^1 \rightarrow S^1$ est une application continue telle que $g(-z) = -g(z)$ pour tout $z \in S^1$, alors g est de degré impair.
- Montrer qu'il n'existe pas d'application continue $h: S^2 \rightarrow S^1$ telle que $h(-x) = -h(x)$ pour tout point $x \in S^2$.
- Conclure.

Exercice 6. (Théorème de Lusternik-Schnirelmann)

Montrer que si la sphère S^2 est recouverte par trois fermés, alors au moins l'un d'entre eux contient deux points antipodaux.

[*Indication* : pour A, B des fermés de S^2 , considérer l'application $x \in S^2 \mapsto (d(x, A), d(x, B)) \in \mathbb{R}^2$.]