Université de Lille 1 Sciences et Technologies

2016/17 - Master 1 - M414

TD7 - Homologie

Dans cette feuille d'exercices, les complexes de chaînes considérés sont des complexes de chaînes de groupes abéliens de la forme

$$C = (\cdots \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \dots \xrightarrow{\partial_2} C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\partial_0} 0).$$

Exercice 1.
Soit $f\colon A \to B$ un morphisme de complexes de chaînes.
Montrer que $\mathrm{Ker}(f)$, $\mathrm{Im}(f)$ et $B/\mathrm{Im}(f)$ sont des complexes de chaînes.

Exercice 2. (Lemme des cinq)
Considérons le diagramme commutatif suivant, à lignes exactes, formé de groupes abéliens et de morphismes de groupes :

$$\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "\varphi_1"] & A_2 \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "\varphi_2"] & A_3 \arrow[r, "f_3"] \arrow[d, "\varphi_3"] & A_4 \arrow[r, "f_4"] \arrow[d, "\varphi_4"] & A_5 \arrow[d, "\varphi_5"] \\
B_1 \arrow[r, "g_1"] & B_2 \arrow[r, "g_2"] & B_3 \arrow[r, "g_3"] & B_4 \arrow[r, "g_4"] & B_5.
\end{tikzcd}$$

Le but de l'exercice est de montrer que si $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_4, \varphi_5$ sont des isomorphismes, alors φ_3 aussi.
a. Montrer que si φ_1 est surjective et φ_2, φ_4 sont injectives, alors φ_3 est injective.
b. Montrer que si φ_2, φ_4 sont surjectives et φ_5 est injective, alors φ_3 est surjective.
c. Conclure.

Exercice 3.
Considérons le diagramme commutatif suivant de complexes de chaînes à lignes exactes :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d, "f"] & B \arrow[r] \arrow[d, "g"] & C \arrow[r] \arrow[d, "h"] & 0 \\
0 \arrow[r] & D \arrow[r] & E \arrow[r] & F \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Montrer que si deux des applications f, g, h induisent des isomorphismes en homologie, alors il en est de même pour la troisième.
Indication : appliquer le lemme des cinq aux suites exactes longues induites en homologie.

Exercice 4. (Acyclicité vs contractilité)
Un complexe de chaînes C est *acyclique* si $H_n(C) = 0$ pour tout $n \geq 0$ et est *contractile* si l'application identité sur C est homotope à l'application nulle.
a. Montrer que si un complexe de chaînes C est contractile alors il est acyclique.
b. Montrer que la réciproque à la question a) est fausse en général.
Indication : considérer le complexe de chaînes C défini par $C_n = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ pour tout $n \geq 0$ et dont l'application de bord est la multiplication par 2.
c. Montrer que la réciproque à la question a) est vraie lorsque chaque C_n est un groupe abélien libre.

Exercice 5. (Homologie singulière vs groupe fondamental)
Soient X un espace topologique et $x_0 \in X$. Considérons le 1-simplexe standard

$$\Delta_1 = \left\{(t_0, t_1) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, t_0 \geq 0,\ t_1 \geq 0,\ t_0 + t_1 = 1\right\}$$

et l'homéomorphisme $\omega\colon \Delta_1 \to [0,1]$ défini par $\omega(t_0, t_1) = t_0$. A tout chemin $f\colon [0,1] \to X$ on associe un 1-simplexe singulier $h(f) = f\omega\colon \Delta_1 \to X$.
a. Montrer que si α est un lacet de X, alors $h(\alpha)$ est un 1-cycle.
Montrer que si α et α' sont des lacets homotopes, alors $h(\alpha)$ et $h(\alpha')$ sont homologues.

b. Montrer que la correspondance h induit un morphisme de groupes

$$\mathrm{H}\colon \pi_1(X,x_0)_{\mathrm{ab}} \to H_1(X),$$

appelé le morphisme de Hurewicz, où $\pi_1(X,x_0)_{\mathrm{ab}}$ désigne l'abélianisé du groupe $\pi_1(X,x_0)$.

c. On souhaite démontrer le théorème de Hurewicz : si X est connexe par arcs, alors H est un isomorphisme :

$$H_1(X) \cong \pi_1(X,x_0)_{\mathrm{ab}}.$$

Pour cela, pour chaque $x \in X$, on choisit un chemin γ_x d'origine x_0 et d'extrémité x. A chaque 1-simplexe singulier $\sigma\colon \Delta_1 \to X$, on associe un lacet $\psi(\sigma)$ de X basé en x_0 défini par

$$\psi(\sigma) = \gamma_{f(0)} \cdot (\sigma\omega^{-1}) \cdot \overline{\gamma_{f(1)}}.$$

En étendant par linéarité l'application $\sigma \mapsto [\psi(\sigma)] \in \pi_1(X,x_0)_{\mathrm{ab}}$, on obtient un morphisme de groupes $S_1(X) \to \pi_1(X,x_0)_{\mathrm{ab}}$. Montrer que ce morphisme induit un morphisme de groupes

$$\Psi\colon H_1(X) \to \pi_1(X,x_0)_{\mathrm{ab}}.$$

d. Montrer que Ψ et H sont inverses l'un de l'autre.
Indication : montrer que si σ est un 1-simplexe singulier de X, alors la classe d'homologie de $h(\psi(\sigma))$ est représentée par le cycle $f + \gamma_{f(0)} - \gamma_{f(1)}$.

e. Conclure.

Exercice 6. (Théorème du point fixe de Brouwer)
Le but de l'exercice est de montrer que toute application continue $f\colon B^n \to B^n$ possède un point fixe.

a. Vérifier que le résultat est vrai pour $n = 0$ et $n = 1$.

b. On suppose que $n \geq 2$. Montrer qu'il n'existe pas de rétraction du disque B^n sur le cercle S^{n-1}.
Indication : dans le cas contraire, considérer le morphisme induit entre les $(n-1)$-ièmes groupes d'homologie singulière et utiliser que $H_{n-1}(S^{n-1}) \cong \mathbb{Z}$ et $H_{n-1}(B^n) \cong 0$.

c. Soit $f\colon B^n \to B^n$ une application continue sans point fixe. Montrer l'application qui envoie $x \in B^n$ sur l'intersection de la demi-droite ouverte $]f(x),x)$ de $\mathbb{R}^n$ avec la sphère S^{n-1} est une rétraction de B^n sur S^{n-1}.

d. Conclure

Exercice 7. (Orientation en un point d'une variété)
Soient M une variété topologique de dimension n et $x \in M$. Montrer que

$$H_p(M, M \setminus \{x\}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } p = n, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Une *orientation en* x de M est la donnée d'un générateur de $H_n(M, M \setminus \{x\})$. Il existe donc deux orientations en un point donné.
Indication : considérer un voisinage fermé D de x homémomorphe à B^n et appliquer le théorème d'excision pour montrer que $H_p(M, M \setminus \{x\}) \cong H_p(D, D \setminus \{x\}) \cong H_p(B^n, S^{n-1})$, puis calculer ce groupe à l'aide de la suite exacte longue d'homologie relative à la paire (B^n, S^{n-1}).

Exercice 8. (Théorème d'invariance du domaine)
Le but de l'exercice est de montrer que si $m \neq n$, alors un ouvert U de $\mathbb{R}^m$ ne peut être homéomorphe à un ouvert V de $\mathbb{R}^n$. En particulier, $\mathbb{R}^m$ et $\mathbb{R}^n$ ne sont pas homéomorphes lorsque $m \neq n$.

a. Soit $x \in U$. Montrer (via le théorème d'excision) que pour tout $p \geq 0$,

$$H_p(U, U \setminus \{x\}) \cong H_p(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m \setminus \{x\}).$$

b. Supposons qu'il existe un homéomorphisme $f\colon U \to V$. Montrer que pour tout $p \geq 0$,

$$H_p(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m \setminus \{x\}) \cong H_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{f(x)\}).$$

c. Conclure en utilisant l'exercice 7.

Exercice 9. (Homologie cellulaire)
Soit X un CW-complexe fini. Rappelons que X est un espace topologique de la forme $X = \cup_{n=0}^{N} X_n$, où X_0 est une réunion finie de points et X_n s'obtient à partir de X_{n-1} par recollement d'un nombre fini de n-cellules le long d'applications continues $f_i \colon S^{n-1} \to X_{n-1}$. Le sous-espace X_n s'appelle le *n-squelette* de X ; il est la réunion de toutes les cellules de X de dimension $\leq n$.

a. Montrer que l'on a les propriétés suivantes :

- $H_q(X_n) = 0$ pour $q > n$,
- $H_q(X) \cong H_q(X_{n+1})$ pour $q \leq n$,
- Pour tout n, il existe une suite exacte longue

$$0 \longrightarrow H_n(X_n) \xrightarrow{p_n} H_n(X_n, X_{n-1}) \xrightarrow{\delta_n} H_{n-1}(X_{n-1}) \xrightarrow{q_n} H_{n-1}(X_n) \longrightarrow 0$$

extraite de la suite exacte longue de la paire (X_n, X_{n-1}).

b. Montrer que

$$\mathrm{Cell}_n(X) = H_n(X_n, X_{n-1}).$$

est un groupe abélien libre dont le rang est le nombre de n-cellules de X.

c. Considérons les applications de bord

$$\partial_n = p_{n-1} \circ \delta_n \colon \mathrm{Cell}_n(X) \to \mathrm{Cell}_{n-1}(X).$$

Montrer que cela définit un complexe de chaînes noté $\mathrm{Cell}(X)$.

d. Montrer que l'homologie de $\mathrm{Cell}(X)$ est isomorphe à l'homologie singulière de X: pour tout $n \geq 0$,

$$H_n(\mathrm{Cell}(X)) \cong H_n(X).$$

Exercice 10. (Homologie des espaces projectifs complexes)
Soit $n \geq 1$. L'espace projectif complexe $\mathbb{CP}^n$ a une structure de CW-complexe fini avec une cellule en dimension paire q avec $0 \leq q \leq 2n$ (voir l'exercice 7 de la feuille TD2). En utilisant l'exercice précédent, montrer que

$$H_q(\mathbb{CP}^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } q \text{ pair et } 0 \leq q \leq 2n, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$