2017/18 - Master 1 - M414

Devoir surveillé n°1 - Durée : 2h00

Exercice 1. (Question de cours)
a. Qu'est-ce que la *topologie quotient* ?
b. Qu'est-ce qu'une *homotopie relativement à une partie* ?

Exercice 2. (Vrai ou faux)
Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses.
Justifier la réponse par une courte preuve ou un contre-exemple.
a. Toute bijection continue est un homéomorphisme.
b. Tout quotient d'un espace topologique discret est un espace topologique discret.
c. L'inversion d'un groupe topologique est un homéomorphisme.

Exercice 3. (Suspension des sphères)
La *suspension* de la sphère S^n de dimension $n \geq 0$ est l'espace topologique quotient

$$\Sigma(S^n) = (S^n \times [0,1])/\mathcal{R}$$

où $\mathcal{R}$ est la relation d'équivalence sur $S^n \times [0,1]$ dont les classes d'équivalence sont $S^n \times \{0\}$, $S^n \times \{1\}$ et les singletons $\{(x,t)\}$ pour $(x,t) \in S^n \times]0,1[$.
Montrer que $\Sigma(S^n)$ est homéomorphe à S^{n+1}.
Indication : considérer l'application

$$(x,t) \in S^n \times [0,1] \mapsto (\sin(\pi t)x, \cos(\pi t)) \in S^{n+1} \subset \mathbb{R}^{n+2} = \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}.$$

Exercice 4. (Demi-plan de Poincaré)
Le *demi-plan de Poincaré* est

$$\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Im}(z) > 0\}$$

muni de la topologie induite par celle de $\mathbb{C}$. On considère le groupe multiplicatif

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) = \{M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R}) \,|\, \det(M) = 1\},$$

muni de la topologie induite par celle de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$, et l'espace topologique quotient $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})/\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ des classes à gauche modulo le sous-groupe

$$\mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) = \{M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \,|\, {}^tMM = I_2\}.$$

Le but de l'exercice est de montrer que $\mathbb{H}$ est est homéomorphe à $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})/\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$.
a. Montrer que le groupe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ agit continûment sur $\mathbb{H}$ via

$$\left(M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, z\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{H} \mapsto M \cdot z = \frac{az+b}{cz+d} \in \mathbb{H}.$$

b. Montrer que l'orbite de i est $\mathbb{H}$.
c. Montrer que le stabilisateur de i est $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$.
d. Conclure.

Exercice 5. (Espace des configurations)
L'*espace des configurations de 2 points dans* $\mathbb{C}$ est le sous-espace topologique de $\mathbb{C}^2$ défini par

$$F_2 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \,|\, z_1 \neq z_2\}.$$

Montrer que F_2 et $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| = 1\}$ ne sont pas homéomorphes mais ont le même type d'homotopie.
Indication : montrer que les applications $\psi \colon S^1 \to F_2$ et $\phi \colon F_2 \to S^1$, définies par $\psi(z) = (z, 0)$ et $\phi(z_1, z_2) = (z_1 - z_2)/|z_1 - z_2|$, sont des équivalences d'homotopie inverses l'une de l'autre en explicitant des homotopies $\phi\psi \simeq \mathrm{id}_{S^1}$ et $\psi\phi \simeq \mathrm{id}_{F_2}$.