2016/18 - Master 1 - M414
Géométrie Différentielle et Topologie Algébrique

Examen (semestre 2, session 1) - Durée : 3h00

Université de Lille — Sciences et Technologies

Exercice 1. (Question de cours)
a. Qu'est-ce qu'une *équivalence d'homotopie* ?
b. Qu'est-ce que l'*homologie* d'un complexe de chaînes ?
c. Enoncer le *théorème d'excision* en homologie relative.

Exercice 2. (Projection stéréographique)
Soit $N = (0, \dots, 0, 1)$ le pôle nord de la sphère $S^n = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \,\big|\, x_1^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 1\}$.
La *projection stéréographique de pôle* N est l'application

$$p\colon S^n \backslash \{N\} \to \mathbb{R}^n$$

qui associe à tout $x \in S^n \backslash \{N\}$ l'unique point $p(x)$ de $\mathbb{R}^n$ tel que les points N, x, et $(p(x), 0)$ soient alignés dans $\mathbb{R}^{n+1}$.
a. Calculer $p(x)$ pour tout $x = (x_1, \dots, x_{n+1}) \in S^n \backslash \{N\}$.
On fera un dessin illustrant la situation dans le cas $n = 2$.
b. Montrer que p est un homéomorphisme.

Exercice 3. (Vrai ou faux)
Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses.
Justifier la réponse par une courte preuve ou un contre-exemple.
a. Tout quotient d'un espace topologique compact est un espace topologique compact.
b. Il existe deux applications continues de $S^1 \times S^1$ vers $\mathbb{R}^2$ qui ne sont pas homotopes.
c. Tout sous-groupe distingué discret d'un groupe topologique connexe est abélien.

Exercice 4. (Logarithme complexe)
Le but de l'exercice est de montrer qu'il n'existe pas d'application continue $\log\colon \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ telle que

$$\log(1) = 0 \quad \text{et} \quad \exp(\log(z)) = z \ \text{ pour tout } z \in \mathbb{C}^*,$$

où exp est l'exponentielle complexe. Pour cela, on suppose qu'une telle application log existe.
a. Determiner $\pi_1(\mathbb{C}, 0)$.
b. Montrer que S^1 est un rétract par déformation de $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. En déduire $\pi_1(\mathbb{C}^*, 1)$.
c. Déterminer les morphismes de groupes $\exp_*$ et $\log_*$ induits en homotopie.
d. Conclure.

Exercice 5. (Homologie du tore)
Le but de l'exercice est de calculer les groupes d'homologie du tore $\mathbb{T} = S^1 \times S^1$.
a. Calculer $H_0(\mathbb{T})$.
b. Calculer $\pi_1(\mathbb{T})$. En déduire $H_1(\mathbb{T})$, sachant que $H_1(\mathbb{T})$ est isomorphe à l'abélianisé de $\pi_1(\mathbb{T})$.
c. Soient a et b deux point distincts de S^1 et notons

$$U = S^1 \times (S^1 \setminus \{a\}) \quad \text{et} \quad V = S^1 \times (S^1 \setminus \{b\}).$$

Montrer que U et V sont des ouverts recouvrant $\mathbb{T}$ et ayant le même type d'homotopie que S^1.
d. Montrer que $U \cap V$ a le même type d'homotopie que $S^1 \amalg S^1$.
e. En utilisant la suite de Mayer-Vietoris, calculer d'abord $H_n(\mathbb{T})$ pour $n \geq 3$, puis calculer $H_2(\mathbb{T})$.
Indication : si $\phi\colon \mathbb{Z}^m \to \mathbb{Z}^n$ est un morphisme de groupes tel que $\mathrm{Im}(\phi) \simeq \mathbb{Z}^k$, alors $\mathrm{Ker}(\phi) \simeq \mathbb{Z}^{m-k}$.