

### Exercice 1.

Soit  $X$  un ensemble. Vérifier que l'ensemble vide et les complémentaires de parties finies de  $X$  forment une topologie sur  $X$ , appelée *topologie cofinie*.

### Exercice 2. (Topologie engendrée)

Soient  $X$  un ensemble et  $\mathcal{B}$  un ensemble de parties de  $X$ .

- Montrer qu'il existe une plus petite (au sens de l'inclusion) topologie sur  $X$  contenant  $\mathcal{B}$ , appelée la *topologie engendrée par  $\mathcal{B}$* .
- Montrer qu'une partie de  $X$  est ouverte pour la topologie engendrée par  $\mathcal{B}$  si et seulement si elle est une union (quelconque) d'intersections finies d'éléments de  $\mathcal{B}$  (en convenant ici que l'intersection indexée par l'ensemble vide est  $X$ ).

### Exercice 3. (Continuité et engendrement)

Soient  $X, Y$  des espaces topologiques et  $\mathcal{B}$  un ensemble de parties de  $Y$  qui engendre la topologie de  $Y$ . Montrer qu'une application  $f: X \rightarrow Y$  est continue si et seulement si pour tout  $B \in \mathcal{B}$ ,  $f^{-1}(B)$  est un ouvert de  $X$ .

### Exercice 4. (Base pour une topologie)

Soit  $X$  un ensemble. Une *base pour une topologie sur  $X$*  est un ensemble  $\mathcal{B}$  de parties de  $X$  tel que

- $\mathcal{B}$  est un recouvrement de  $X$  ;
  - l'intersection de deux éléments de  $\mathcal{B}$  est une union d'éléments de  $\mathcal{B}$ .
- Montrer que la topologie engendrée par une telle base  $\mathcal{B}$  est l'ensemble des unions d'éléments de  $\mathcal{B}$ .
  - Montrer que l'ensemble des boules ouvertes d'espace métrique  $(X, d)$  est une base pour une topologie sur  $X$ . La topologie sur  $X$  engendrée par cette base s'appelle la *topologie induite par la distance  $d$* .

### Exercice 5. (Base d'une topologie)

Soit  $X$  un espace topologique. Une *base pour la topologie de  $X$*  est une base pour une topologie sur  $X$  qui engendre la topologie de  $X$ . Soit  $\mathcal{B}$  un ensemble d'ouverts de  $X$ . Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

- $\mathcal{B}$  est une base pour la topologie de  $X$  ;
- pour tout ouvert  $U$  de  $X$  et tout  $x \in U$ , il existe  $B \in \mathcal{B}$  tel que  $x \in B \subset U$  ;
- les ouverts de  $X$  sont les unions d'ouverts dans  $\mathcal{B}$ .

### Exercice 6.

Soient  $\mathcal{B}$  l'ensemble des intervalles ouverts  $]a, b[$  et  $\mathcal{B}'$  l'ensemble des intervalles demi-ouverts  $[a, b[$ , où  $a, b$  sont des nombres réels tels que  $a < b$ . Montrer que  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$  sont des bases pour une topologie sur  $\mathbb{R}$ . Comparer les topologies sur  $\mathbb{R}$  qu'elles engendrent.

### Exercice 7. (Topologie produit)

Soient  $X$  et  $Y$  deux espaces topologiques. On munit  $X \times Y$  de la *topologie produit*, c'est-à-dire de la topologie engendrée par la base  $\mathcal{B} = \{U \times V \mid U \text{ ouvert de } X, V \text{ ouvert de } Y\}$ .

- Vérifier que  $\mathcal{B}$  est bien une base pour une topologie sur  $X \times Y$ .
- Rappelons qu'une application  $f: Z \rightarrow X \times Y$ , où  $Z$  est un espace topologique, est continue si et seulement si les deux applications  $p_1 f: Z \rightarrow X$  et  $p_2 f: Z \rightarrow Y$  sont continues, où  $p_1: X \times Y \rightarrow X$  et  $p_2: X \times Y \rightarrow Y$  sont les projections. Il est faux de conjecturer qu'une application  $f: X \times Y \rightarrow Z$  est continue si elle est continue en chaque variable séparément. Vérifier cela en considérant la fonction  $F: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $F(0, 0) = 0$  et  $F(x, y) = xy/(x^2 + y^2)$  si  $(x, y) \neq (0, 0)$ .

### Exercice 8. (Espaces topologiques séparés)

Un espace topologique est *séparé* si deux points distincts de l'espace admettent toujours des voisinages ouverts disjoints.

- Montrer qu'un espace topologique  $X$  est séparé si et seulement si la diagonale  $\Delta = \{(x, x) \mid x \in X\}$  est un fermé de  $X \times X$ .
- Soit  $f: X \rightarrow Y$  une application continue avec  $Y$  séparé. Montrer que le *graphe* de  $f$ , défini comme l'ensemble  $\Delta_f = \{(x, f(x)) \mid x \in X\}$ , est un fermé de  $X \times Y$ .

### Exercice 9. (Topologie induite)

- Soient  $X$  un espace topologique, ayant  $\mathcal{T}$  pour topologie, et  $A$  est une partie de  $X$ . Vérifier que

$$\mathcal{T}_A = \{U \cap A \mid U \in \mathcal{T}\}$$

est une topologie sur  $A$ , appelée *topologie induite* sur  $A$  par  $X$ . Un *sous-espace topologique* de  $X$  est une partie de  $X$  munie de la topologie induite par  $X$ .

- Soient  $X, Y$  des espaces topologiques,  $A$  un sous-espace topologique de  $X$  et  $B$  un sous-espace topologique de  $Y$ . Montrer que la topologie produit sur  $A \times B$  coïncide avec la topologie induite sur  $A \times B$  par  $X \times Y$ .
- La boucle d'oreille hawaïenne est l'union  $C = \bigcup_{n \geq 1} C_n$  des cercles  $C_n$  de centre  $(1/n, 0)$  et de rayon  $1/n$ . On munit  $C$  de la topologie induite par  $\mathbb{R}^2$ . Montrer que l'application  $f: C \rightarrow C$ , définie par  $f(x, y) = (nx, ny)$  pour  $(x, y) \in C_n$ , n'est pas continue.

### Exercice 10. (Topologie de Zariski)

Soit  $\mathcal{P} = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$  l'anneau des polynômes à  $n$  variables. A tout idéal  $I$  de  $\mathcal{P}$ , on associe l'ensemble

$$Z(I) = \{(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^n \mid P(a_1, \dots, a_n) = 0 \text{ pour tout } P \in I\}.$$

- Montrer que les ensembles  $Z(I)$  définissent l'ensemble des fermés d'une topologie sur  $\mathbb{C}^n$ , appelée *topologie de Zariski*.
- Vérifier que pour  $n = 1$ , la topologie de Zariski coïncide avec la topologie cofinie (voir l'exercice 1).
- Montrer que  $\mathcal{B} = \{B_P \mid P \in \mathcal{P}\}$ , où

$$B_P = \mathbb{C}^n \setminus Z((P)) = \{(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^n \mid P(a_1, \dots, a_n) \neq 0\},$$

est une base de la topologie de Zariski.

- Observer que la topologie de Zariski n'est pas séparée : deux ouverts non-vides se rencontrent obligatoirement.

### Exercice 11.

Montrer que les homéomorphismes  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sont les bijections monotones de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ .

### Exercice 12. (Connexité)

- Soit  $X$  un espace topologique. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
  - pour tous ouverts  $U, V$  de  $X$ , si  $U \cap V = \emptyset$  et  $U \cup V = X$ , alors  $U = \emptyset$  ou  $V = \emptyset$  ;
  - pour tous fermés  $F, G$  de  $X$ , si  $F \cap G = \emptyset$  et  $F \cup G = X$ , alors  $F = \emptyset$  ou  $G = \emptyset$  ;
  - les parties de  $X$  ouvertes et fermées sont  $\emptyset$  et  $X$  ;
  - toute application continue de  $X$  vers un espace topologique discret est constante.Un tel espace topologique  $X$  est dit *connexe*.
- Une partie  $C$  d'un espace topologique est *connexe* si  $C$  munie de la topologie induite est un espace topologique connexe. Montrer qu'une partie  $C$  d'un espace topologique  $X$  est connexe si et seulement si pour tous ouverts  $U, V$  de  $X$  tels que  $U \cap V \cap C = \emptyset$  et  $C \subset U \cup V$ , on a :  $C \subset U$  ou  $C \subset V$ .
- Montrer que l'image d'une partie connexe par une application continue est connexe.
- Montrer que l'union de parties connexes ayant un point en commun est connexe.
- Montrer que le produit de deux espaces topologiques connexes est connexe.
- Montrer que si  $C$  est une partie connexe d'un espace topologique  $X$ , alors toute partie  $A$  de  $X$  telle que  $C \subset A \subset \overline{C}$  est connexe.

**Exercice 13.**

Montrer que les parties connexes de  $\mathbb{R}$  sont les intervalles.

**Exercice 14. (Connexité par arc)**

Un espace topologique  $X$  est *connexe par arcs* si pour tous  $x, y \in X$ , il existe un *chemin* reliant  $x$  à  $y$ , c'est-à-dire une application continue  $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$  telle que  $\gamma(0) = x$  et  $\gamma(1) = y$ . Une partie  $C$  d'un espace topologique est *connexe par arcs* si  $C$  munie de la topologie induite est un espace topologique connexe par arcs.

- Montrer qu'un espace topologique connexe par arcs est connexe.
- Montrer que l'image d'une partie connexe par arcs par une application continue est connexe par arcs.
- Montrer que le produit de deux espaces topologiques connexes par arcs est connexe par arcs.

**Exercice 15.**

Montrer que  $GL_n(\mathbb{C})$  est connexe.

[Indication : pour  $A, B \in GL_n(\mathbb{C})$ , considérer l'application  $t \mapsto \det(tA + (1-t)B)$  et ses zéros.]

**Exercice 16.**

L'intervalle  $[0, 1]$  et le carré  $[0, 1] \times [0, 1]$  sont-ils homéomorphes ?

**Exercice 17.**

Montrer que l'adhérence de  $\{(x, \sin(1/x)) \mid x > 0\} \subset \mathbb{R}^2$  est connexe mais n'est pas connexe par arcs.

**Exercice 18. (Composantes connexes et composantes connexes par arcs)**

Soit  $X$  un espace topologique. Les *composantes connexes* de  $X$  sont les classes d'équivalences de la relation d'équivalence sur  $X$  définie par  $x \sim y$  s'il existe une partie connexe de  $X$  contenant  $x$  et  $y$ . Les *composantes connexes par arcs* de  $X$  sont les classes d'équivalences de la relation d'équivalence sur  $X$  définie par  $x \sim_a y$  s'il existe un chemin reliant  $x$  à  $y$ .

- Montrer que les composantes connexes de  $X$  sont des parties fermées connexes disjointes dont l'union est  $X$ , et que toute partie connexe non vide de  $X$  est contenue dans une unique composante connexe.
- Montrer que les composantes connexes par arcs de  $X$  sont des parties connexes par arcs disjointes dont l'union est  $X$ , et que toute partie connexe par arcs non vide de  $X$  est contenue dans une unique composante connexe par arcs.
- Montrer que toute composante connexe par arcs de  $X$  est contenue dans une unique composante connexe de  $X$ .
- Montrer que si  $X$  est localement connexe par arcs (i.e., admet une base d'ouverts connexes par arcs), alors les composantes connexes par arcs de  $X$  sont les composantes connexes de  $X$ .

**Exercice 19.**

Montrer que si un espace topologique  $X$  est une réunion disjointe d'ouverts connexes, alors les composantes connexes de  $X$  sont ces ouverts connexes.

**Exercice 20.**

Déterminer le nombre de composantes connexes du sous-espace topologique de  $\mathbb{R}^2$  suivant :

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 = x(x-1)(x-2)\}.$$