2017/18 - Master 1 - M414

TD2 - Topologie quotient

Exercice 1.
Les groupes topologiques $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ sont-ils compacts ? connexes ?
Même question pour $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, $\mathrm{U}_n(\mathbb{C})$, $\mathrm{SU}_n(\mathbb{C})$.

Exercice 2. (Projection stéréographique)
Soit $N = (0, \ldots, 0, 1)$ le pôle nord de la sphère $S^n = \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \,|\, x_1^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 1\}$.
La *projection stéréographique de pôle N* est l'application

$$p\colon S^n \backslash \{N\} \to \mathbb{R}^n$$

qui associe à tout $x \in S^n \backslash \{N\}$ l'unique point $p(x)$ de $\mathbb{R}^n$ tel que les points N, x, et $(p(x), 0)$ soient alignés dans $\mathbb{R}^{n+1}$.
a. Calculer $p(x)$ pour tout $x = (x_1, \ldots, x_{n+1}) \in S^n \backslash \{N\}$.
On fera un dessin illustrant la situation dans le cas $n = 2$.
b. Montrer que p est un homéomorphisme.

Exercice 3. (Cônes d'espaces topologiques)
Le *cône* d'un espace topologique X est l'espace quotient $C(X) = X \times [0, 1]/X \times \{0\}$.
Montrer que $C(S^{n-1}) \cong B^n$.

Exercice 4. (Espaces projectifs)
Soient $\mathbb{K}$ un corps et $n \geq 1$. L'*espace projectif sur $\mathbb{K}$ dimension n* est le quotient

$$\mathbb{KP}^n = (\mathbb{K}^{n+1} \backslash \{0\})/\mathbb{K}^*$$

où $\mathbb{K}^*$ agit par multiplication scalaire. La classe de $(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{K}^{n+1} \backslash \{0\}$ se note $[x_1, \ldots, x_{n+1}]$.
Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on munit $\mathbb{KP}^n$ de la topologie quotient.
a. Montrer que

$$\mathbb{RP}^n \cong S^n/\mathbb{Z}_2 \cong B^n/\mathcal{R},$$

où $\mathbb{Z}_2 = \{1, -1\}$ agit sur $S^n = \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \,|\, x_1^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 1\}$ par multiplication scalaire et $\mathcal{R}$ est la relation d'équivalence sur $B^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \,|\, x_1^2 + \cdots + x_n^2 \leq 1\}$ définie par $y\mathcal{R}x$ si $y = x$ ou ($x \in S^{n-1}$ et $y = -x$).
b. Montrer que

$$\mathbb{CP}^n \cong S^{2n+1}/S^1 \cong B^{2n}/\mathcal{R},$$

où $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| = 1\}$ agit sur $S^{2n+1} = \{(z_1, \ldots, z_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1} \,|\, |z_1|^2 + \cdots + |z_{n+1}|^2 = 1\}$ par multiplication scalaire et $\mathcal{R}$ est la relation d'équivalence sur $B^{2n} = \{(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n \,|\, |z_1|^2 + \cdots + |z_n|^2 \leq 1\}$ définie par $y\mathcal{R}x$ si $y = x$ ou ($x \in S^{2n-1}$ et il existe $\lambda \in S^1$ tel que $y = \lambda x$).
c. Montrer que $\mathbb{CP}^n$ et $\mathbb{RP}^n$ sont compacts.
d. Montrer que $\mathbb{CP}^1 \cong S^2$. En déduire que $S^3/S^1 \cong S^2$.

Exercice 5.
Montrer que la sphère S^3 est obtenue en recollant les tores pleins $S^1 \times B^2$ et $B^2 \times S^1$ le long de leur bord commun $S^1 \times S^1$.
[*Indication :* montrer que $A = \{(x, y, z, t) \in S^3 \,|\, x^2 + y^2 \geq 1/2\}$ et $B = \{(x, y, z, t) \in S^3 \,|\, x^2 + y^2 \leq 1/2\}$ sont homéomorphes à des tores pleins.]

Exercice 6. (Propriété universelle du recollement)
Soient X, Y des espaces topologiques, A une partie de Y et $f\colon A \to X$ une application continue. On rappelle que le *recollement de Y à X le long de f* est l'espace topologique quotient

$$X \cup_f Y = (X \amalg Y)/\mathcal{R}$$

où $\mathcal{R}$ est la relation d'équivalence sur $X \amalg Y$ engendrée par $f(a)\mathcal{R}a$ pour $a \in A$.
Un carré

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, hook, "j"] \arrow[d, "f"'] & Y \arrow[d, "\beta"] \\ X \arrow[r, "\alpha"'] & Z \end{tikzcd}$$

où Z est un espace topologique, α,β sont des applications continues et $j\colon A \hookrightarrow Y$ est l'inclusion, est dit *cocartésien* s'il est commutatif (c'est-à-dire, $\alpha f = \beta j$) et si pour toutes applications continues $h\colon X \to W$ et $l\colon Y \to W$, où W est une espace topologique, vérifiant $hf = lj$, il existe une unique application continue $\psi\colon Z \to W$ telle que $h = \psi\alpha$ et $l = \psi\beta$.

a. Notons par γ (respectivement, δ) la composition de l'inclusion canonique $X \hookrightarrow X \amalg Y$ (respectivement, $Y \hookrightarrow X \amalg Y$) avec la projection canonique $X \amalg Y \twoheadrightarrow X \cup_f Y$. Montrer que le carré

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, hook, "j"] \arrow[d, "f"'] & Y \arrow[d, "\delta"] \\ X \arrow[r, "\gamma"'] & X \cup_f Y \end{tikzcd}$$

est cocartésien.

b. Montrer que si

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, hook, "j"] \arrow[d, "f"'] & Y \arrow[d, "\beta"] \\ X \arrow[r, "\alpha"'] & Z \end{tikzcd}$$

est un carré cocartésien, alors $Z \cong X \cup_f Y$.

Exercice 7. (Décomposition celllulaire des espaces projectifs)

a. Utiliser les projections canoniques $p_{n-1}\colon S^{n-1} \to \mathbb{RP}^{n-1}$ et $q_{n-1}\colon S^{2n-1} \to \mathbb{CP}^{n-1}$ de l'exercice 5 et les inclusions $S^{n-1} \hookrightarrow B^n$ pour construire des carrés cocartésiens :

$$\begin{tikzcd} S^{n-1} \arrow[r, hook] \arrow[d, "p_{n-1}"'] & B^n \arrow[d] \\ \mathbb{RP}^{n-1} \arrow[r] & \mathbb{RP}^n \end{tikzcd} \quad \text{et} \quad \begin{tikzcd} S^{2n-1} \arrow[r, hook] \arrow[d, "q_{n-1}"'] & B^{2n} \arrow[d] \\ \mathbb{CP}^{n-1} \arrow[r] & \mathbb{CP}^n \end{tikzcd}$$

b. En déduire que $\mathbb{RP}^n \cong \mathbb{RP}^{n-1} \cup_{p_{n-1}} B^n$ et $\mathbb{CP}^n \cong \mathbb{CP}^{n-1} \cup_{q_{n-1}} B^{2n}$.

c. Déterminer une décomposition cellulaire de $\mathbb{RP}^n$ et $\mathbb{CP}^n$.

Exercice 8.
Montrer que $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ n'est pas séparé, où $\mathbb{Q}$ agit sur $\mathbb{R}$ par translation.

Exercice 9.
Montrer qu'un sous-groupe Γ de $\mathbb{R}^n$ est discret si et seulement s'il existe des vecteurs $v_1, \ldots, v_m \in \mathbb{R}^n$ linéairement indépendants tels que $\Gamma = \mathbb{Z}v_1 + \cdots + \mathbb{Z}v_m$.

Exercice 10.
Soient G un groupe topologique séparé et H un sous-groupe de G.
Montrer que l'espace des orbites $G/H = \{gH \mid g \in G\}$ est séparé si et seulement si H est fermé.

Exercice 11.
Soient G un groupe topologique et H un sous-groupe distingué de G.
Montrer que le groupe G/H, muni de la topologie quotient, est un groupe topologique.

Exercice 12. (Exponentielle d'espaces topologiques)
Etant donnés des espaces topologiques X et Y, on note par $\mathcal{C}(X,Y)$ l'ensemble des applications continues de X vers Y, et par Y^X l'espace topologique d'ensemble sous-jacent $\mathcal{C}(X,Y)$ et muni de la topologie dite *compacte-ouverte*, c'est-à-dire engendrée par les ensembles

$$W(K,U) = \{f \in \mathcal{C}(X,Y) \,\big|\, f(K) \subset U\}$$

où K est un compact de X et U un ouvert de Y.
Soient X, Y, Z des espaces topologiques. On considère l'application

$$\Phi\colon \mathcal{C}(Z \times X, Y) \to \mathcal{C}(Z, Y^X)$$

définie par $\Phi(f)(z) = f_z \in Y^X$ pour tous $f \in \mathcal{C}(Z \times X, Y)$ et $z \in Z$, où $f_z(x) = f(z,x)$ pour tout $x \in X$.
a. Montrer que l'application Φ est bien définie et injective.
b. Montrer que si X est localement compact (i.e., X est séparé et tout point de X admet un voisinage compact) alors l'application Φ est bijective.
[*Indication :* montrer que dans un espace topologique localement compact, tout voisinage d'un point contient un voisinage compact du point.]

Exercice 13. (Actions de groupes topologiques)
Soient G un groupe topologique et X un espace topologique. Soit $\mathrm{Homeo}(X)$ l'ensemble des homéomorphismes de X vers X muni de la topologie compacte-ouverte (voir l'exercice précédent).
a. Montrer que toute action continue de G sur X induit un morphisme de groupes continu de G vers $\mathrm{Homeo}(X)$.
b. Montrer que si X est localement compact, alors tout morphisme de groupes continu $\varphi\colon G \to \mathrm{Homeo}(X)$ définit une unique action continue de G sur X telle que φ soit le morphisme de groupes induit.