2017/18 - Master 1 - M414

TD3 - Espaces topologiques

Variétés

Exercice 1. (Espaces projectifs)
a. Montrer que $\mathbb{RP}^n$ est une variété de dimension n.
b. Montrer que $\mathbb{CP}^n$ est une variété de dimension $2n$.

Exercice 2. (Variétés de Stiefel et de Grassman)
Soient des entiers $0 \leq k \leq n$. On munit $\mathbb{R}^n$ de son produit scalaire canonique.
La variété de Stiefel (réelle) de type (k, n) est

$$V_{k,n}(\mathbb{R}) = \{\text{familles orthonormées de } k \text{ vecteurs de } \mathbb{R}^n\}.$$

La variété de Grassmann (réelle) de type (k, n) est

$$G_{k,n}(\mathbb{R}) = \{\text{sous-espaces vectoriels de dimension } k \text{ de } \mathbb{R}^n\}.$$

On munit $V_{k,n}(\mathbb{R})$ de la topologie induite par celle de $(\mathbb{R}^n)^k \cong \mathbb{R}^{nk}$. On munit $G_{k,n}(\mathbb{R})$ de la topologie rendant continue l'application

$$(a_1, \ldots, a_k) \in V_{k,n}(\mathbb{R}) \mapsto \mathrm{vect}(a_1, \ldots, a_k) \in G_{k,n}(\mathbb{R}).$$

On rappelle que $V_{k,n}(\mathbb{R})$ et $G_{k,n}(\mathbb{R})$ sont des espaces topologiques compacts.
a. Montrer que $V_{k,n}(\mathbb{R})$ est une variété de dimension $nk - k(k+1)/2$.
b. Montrer que $G_{k,n}(\mathbb{R})$ est une variété de dimension $nk - k^2$.

Δ-complexes

Un Δ-*complexe* est une famille d'ensembles $X_\bullet = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ munie d'applications $\{\partial_i \colon X_n \to X_{n-1}\}_{n\geq 1,\, 0\leq i\leq n}$ telles que $\partial_i\partial_j = \partial_{j-1}\partial_i$ pour tous $n \geq 2$ et $0 \leq i < j \leq n$.

Un *morphisme* de Δ-complexes de $X_\bullet$ vers $X'_\bullet$ est une famille d'applications $s_\bullet = (s_n \colon X_n \to X'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\partial'_i s_n = s_{n-1}\partial_i$ pour tous $n \geq 1$ et $0 \leq i \leq n$.

Exercice 3. (Δ-complexe singulier d'un espace topologique)
Le n-*simplexe standard* est

$$\Delta_n = \{(x_0, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_i \geq 0 \text{ et } x_0 + \cdots x_n = 1\}.$$

Pour $n \geq 1$ et $0 \leq i \leq n$, posons

$$d_i \colon \Delta_{n-1} \to \Delta_n, \quad (x_0, \cdots, x_{n-1}) \mapsto (x_0, \cdots, x_{i-1}, 0, x_i, \cdots, x_{n-1}).$$

a. Montrer que $d_j \circ d_i = d_i \circ d_{j-1}$ pour tous $i < j$.
b. Soit Y un espace topologique. Notons $\mathrm{Sing}_n(Y) = C(\Delta_n, Y)$ et définissons

$$\partial_i \colon \mathrm{Sing}_n(Y) \to \mathrm{Sing}_{n-1}(Y), \quad f \mapsto f \circ d_i.$$

Montrer que $\mathrm{Sing}_\bullet(Y)$ est un Δ-complexe.
c. Soit $\phi \colon Y \to Z$ une application continue. Pour $n \geq 0$, considérons l'application

$$\mathrm{Sing}_n(\phi) \colon \mathrm{Sing}_n(Y) \to \mathrm{Sing}_n(Z), \quad f \mapsto \phi \circ f.$$

Montrer que $\mathrm{Sing}_\bullet(\phi) = (\mathrm{Sing}_n(\phi))_{n\in\mathbb{N}} \colon \mathrm{Sing}_\bullet(Y) \to \mathrm{Sing}_\bullet(Z)$ est un morphisme de Δ-complexes.
d. Montrer que $\mathrm{Sing}_\bullet(\mathrm{id}_Y) = \mathrm{id}_{\mathrm{Sing}_\bullet(Y)}$.
e. Montrer que $\mathrm{Sing}_\bullet(\psi \circ \phi) = \mathrm{Sing}_\bullet(\psi) \circ \mathrm{Sing}_\bullet(\phi)$ pour toutes applications continues composables.

Exercice 4. (Réalisation géométrique d'un Δ-complexe)
La *réalisation géométrique* d'un Δ-complexe $X_\bullet$ est l'espace topologique

$$|X_\bullet| = \left(\coprod_{n\geq 0} X_n \times \Delta_n\right) / \sim$$

où X_n est muni de la topologie discrète et $\sim$ est la relation d'équivalence engendrée par

$$(x, d_i(y)) \sim (\partial_i(x), y)$$

pour $x \in X_n$, $y \in \Delta_{n-1}$, $n \geq 1$ et $0 \leq i \leq n$.

a. Soit $s_\bullet \colon X_\bullet \to Y_\bullet$ un morphisme de Δ-complexes. Montrer que les applications

$$(x, y) \in X_n \times \Delta_n \mapsto (s_n(x), y) \in Y_n \times \Delta_n$$

induisent une application continue $|s_\bullet| \colon |X_\bullet| \to |Y_\bullet|$.

b. Montrer que $|\mathrm{id}_{X_\bullet}| = \mathrm{id}_{|X_\bullet|}$.

c. Montrer que $|t_\bullet \circ s_\bullet| = |t_\bullet| \circ |s_\bullet|$ pour tous morphismes de Δ-complexes composables.

Exercice 5. (Adjonction)

a. Soit $X_\bullet$ un Δ-complexe. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in X_n$, notons $\eta_{X_\bullet,n}(x)$ l'application $y \in \Delta_n \mapsto \overline{(x, y)} \in |X_\bullet|$. Montrer que

$$\eta_{X_\bullet} = (\eta_{X_\bullet,n})_{n\in\mathbb{N}} \colon X_\bullet \to \mathrm{Sing}_\bullet(|X_\bullet|)$$

est un morphisme de Δ-complexes.

b. Soit Y un espace topologique. Montrer que les applications $(f, y) \in \mathrm{Sing}_n(Y) \times \Delta_n \mapsto f(y) \in Y$ induisent une application continue

$$\varepsilon_Y \colon |\mathrm{Sing}_\bullet(Y)| \to Y.$$

c. Montrer que pour tout Δ-complexe $X_\bullet$, on a :

$$\varepsilon_{|X_\bullet|} \circ |\eta_{X_\bullet}| = \mathrm{id}_{|X_\bullet|}.$$

d. Montrer que pour tout espace topologique Y, on a :

$$\mathrm{Sing}_\bullet(\varepsilon_Y) \circ \eta_{\mathrm{Sing}_\bullet(Y)} = \mathrm{id}_{\mathrm{Sing}_\bullet(Y)}.$$

Exercice 6. (Δ-complexe d'un groupe)
Soit G un groupe. Notons $X_0(G) = \{e\}$ (un singleton) et $X_n(G) = G^n$ pour $n \geq 1$.
Définissons

$$\partial_0 = \partial_1 \colon X_1(G) \to X_0(G), \quad g \mapsto e$$

et, pour $n \geq 2$ et $0 \leq i \leq n$,

$$\partial_i \colon X_n(G) \to X_{n-1}(G), \quad (g_1, \cdots, g_n) \mapsto \begin{cases} (g_2, \cdots, g_n) & \text{si } i = 0, \\ (g_1, \cdots, g_{i-1}, g_i g_{i+1}, g_{i+2}, \cdots, g_n) & \text{si } 0 < i < n, \\ (g_1, \cdots, g_{n-1}) & \text{si } i = n. \end{cases}$$

a. Montrer que $X_\bullet(G)$ est un Δ-complexe.

b. Soit $\phi \colon G \to H$ morphisms de groupes. Pour $n \geq 0$, considérons l'application

$$X_n(\phi) \colon X_n(G) \to X_n(H), \quad (g_1, \cdots, g_n) \mapsto (\phi(g_1), \cdots, \phi(g_n)).$$

Montrer que $X_\bullet(\phi) = (X_n(\phi))_{n\in\mathbb{N}} \colon X_\bullet(G) \to X_\bullet(H)$ est un morphisme de Δ-complexes.

c. Montrer que l'espace topologique $BG = |X_\bullet(G)|$, appelé le *classifiant* de G, est connexe par arcs.