2017/18 - Master 1 - M414

TD4 - Homotopie

Exercice 1. (Type d'homotopie)
Montrer que les espaces topologiques suivants ont même type d'homotopie.
a. Un espace topologique X et le produit $X \times [0,1]$.
b. Le cercle S^1 et le complémentaire d'un cercle dans S^3.
c. Le groupe orthogonal $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et le groupe linéaire $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.
[*Indication :* voir l'orthogonalisation de Gram-Schmidt comme une rétraction par déformation.]

Exercice 2. (Type d'homotopie et connnexité par arcs)
Soient X, Y deux espaces topologiques ayant le même type d'homotopie.
Montrer que si X est connexe par arcs, alors Y l'est également.

Exercice 3. (Contractilité des cônes)
Montrer que le cône $C(X) = X \times [0,1]/X \times \{0\}$ d'un espace topologique non vide X est contractile.

Exercice 4. (Prolongement d'applications)
Soient X et Y des espaces topologiques non vides. On identifie X avec la base du cône $C(X)$, c'est-à-dire avec l'image de $X \times \{1\}$ par la projection canonique $X \times [0,1] \to C(X)$.
a. Montrer qu'une application continue $f : X \to Y$ se prolonge en une application continue $C(X) \to Y$ si et seulement si f est homotope à une application constante.
b. En déduire qu'une application continue $S^n \to Y$ se prolonge en une application continue $B^{n+1} \to Y$ si et seulement si elle est homotope à une application constante.

Exercice 5. (Fermeture des rétracts)
Montrer que tout rétract d'un espace séparé est fermé.

Exercice 6. (Connexité des rétracts)
Montrer que tout rétract d'un espace connexe est connexe.

Exercice 7. (Rétract non par déformation)
Soit P une partie non vide de B^{n+1} telle que $P \cap S^n = \emptyset$. Montrer que S^n est un rétract de $B^{n+1} \setminus P$. Construire un exemple de rétract qui n'est pas un rétract par déformation.

Exercice 8. (Type d'homotopie vs rétract par déformation)
Montrer que l'union de deux cercles tangents et l'union d'un carré (vide) avec l'une de ses diagonales ont même type d'homotopie, mais qu'aucun de ces deux espaces topologiques n'est homéomorphe à un rétract par déformation de l'autre.