2017/18 - Master 1 - M414

TD5 - Groupe fondamental 1

Exercice 1. (Rétracts et groupe fondamental)
Soient A un rétract d'un espace topologique X et $a \in A$.
On choisit une rétraction $r\colon X \to A$ de l'inclusion $i\colon A \hookrightarrow X$.

a. Montrer que les morphismes de groupes $i_*\colon \pi_1(A,a) \to \pi_1(X,a)$ et $r_*\colon \pi_1(X,a) \to \pi_1(A,a)$ induits par i et r sont respectivement injectif et surjectif.

b. Montrer que si $i_*(\pi_1(A,a))$ est distingué dans $\pi_1(X,a)$, alors $\pi_1(X,a) \cong \pi_1(A,a) \times \mathrm{Ker}(r_*)$.
[*Indication :* remarquer que si $p\colon G \to H$ et $q\colon H \to G$ sont des morphismes de groupes tels que $q(H)$ soit distingué dans G et $pq = \mathrm{id}_H$, alors l'application $H \times \mathrm{Ker}(p) \to G$, $(h,g) \mapsto q(h)g$, est un isomorphisme de groupes.]

Exercice 2. (Composante connexe et groupe fondamental)
Soient X un espace topologique et $x_0 \in X$. Notons C la composante connexe par arcs de x_0.
Montrer que l'inclusion $C \hookrightarrow X$ induit un isomorphisme de groupes $\pi_1(C,x_0) \to \pi_1(X,x_0)$.

Exercice 3. (Groupe fondamental des groupes topologiques)

a. *Principe d'Eckmann-Hilton.*
Soit M un ensemble muni de deux produits, i.e., deux applications $*\colon M\times M \to M$ et $\circ\colon M\times M \to M$, admettant une unité commune et vérifiant pour tous $a,b,c,d \in M$,

$$(a * b) \circ (c * d) = (a \circ c) * (b \circ d).$$

Montrez que les produits $*$ et $\circ$ sont égaux et que $* = \circ$ est associatif et commutatif.

b. Montrez que le groupe fondamental $\pi_1(G,1)$ d'un groupe topologique G est commutatif.

Exercice 4. (Commutativité du groupe fondamental)
Soit X un espace topologique connexe par arcs. On rappelle que tout chemin (dans X) d'un point $x \in X$ à un point $y \in X$ induit un isomorphisme de groupes $\pi_1(X,x) \to \pi_1(X,y)$.
Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

a. Le groupe fondamental $\pi_1(X,x)$ est commutatif pour un (et donc tout) $x \in X$;

b. Pour tous $x,y \in X$, les chemins de x à y définissent le même isomorphisme $\pi_1(X,x) \to \pi_1(X,y)$.

Exercice 5. (Groupe fondamental et espace des lacets)
Soient X un espace topologique et $x_0 \in X$. On rappelle qu'un lacet de X basé en x_0 est une application continue $\alpha\colon [0,1] \to X$ telle que $\alpha(0) = \alpha(1) = x_0$. On munit l'ensemble $\Omega(X,x_0)$ des lacets de X basés en x_0 de la topologie dite *compacte-ouverte*, c'est-à-dire engendrée par les ensembles

$$W(K,U) = \{\alpha \in \Omega(X,x_0) \,|\, \alpha(K) \subset U\}$$

où K est un compact de $[0,1]$ et U est un ouvert de X. L'ensemble des composantes connexes par arcs d'un espace topologique Y se note $\pi_0(Y)$. Le but de l'exercice est de montrer que

$$\pi_1(X,x_0) = \pi_0(\Omega(X,x_0)).$$

a. Montrer que deux lacets α,β de X basés en x_0 sont homotopes (à extrémités fixes) si et seulement s'il existe un chemin (continu) dans $\Omega(X,x_0)$ reliant α à β.
[*Indication :* relier une homtopie H de α à β et un chemin Γ dans $\Omega(X,x_0)$ de α à β par $\Gamma(t) = H(\cdot,t)$.]

b. Conclure.