2017/18 - Master 1 - M414

TD6 - Groupe fondamental 2

On considère le cercle $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \,\big|\, |z| = 1\}$ avec point base $1 \in S^1$. Le but de cette feuille de TD est de montrer que l'application

$$\psi\colon \begin{cases} \mathbb{Z} & \to & \pi_1(S^1, 1) \\ n & \mapsto & [\gamma_n] \end{cases}$$

est un isomorphisme de groupes, où pour tout $n \in \mathbb{Z}$, le lacet $\gamma_n\colon [0,1] \to S^1$ est défini par $\gamma_n(s) = e^{2i\pi ns}$.

Exercice 1. (Le revêtement exponentiel)
On considère l'application

$$p\colon \begin{cases} \mathbb{R} & \to & S^1 \\ t & \mapsto & p(t) = e^{2i\pi t} \end{cases}$$

Montrer qu'il existe un recouvrement ouvert $(U_\alpha)_\alpha$ de S^1 et une décomposition de chaque $p^{-1}(U_\alpha)$ en réunion disjointe d'ouverts

$$p^{-1}(U_\alpha) = \coprod_n I_{\alpha,n}$$

tels que l'application p induise un homéomorphisme $p_{\alpha,n}\colon I_{\alpha,n} \to U_\alpha$ sur chaque $I_{\alpha,n}$.
[*Indication :* on pourra considérer les arcs de cercle $U_\alpha = S^1 \setminus \{e^{2i\pi\alpha}\}$ où $\alpha \in \{0, 1/2\}$ et les intervalles $I_{\alpha,n} =]n+\alpha, n+1+\alpha[$ où $n \in \mathbb{Z}$.]

Exercice 2. (Lemme de Lebesgue)
Soit $(\Omega_\alpha)_{\alpha\in A}$ un recouvrement ouvert d'un espace métrique compact (X,d). Montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que toute partie de X de diamètre inférieur à δ soit contenu dans l'un des Ω_α. Un tel δ s'appelle un *nombre de Lebesgue* du recouvrement $(\Omega_\alpha)_{\alpha\in A}$.
[*Indication :* lorsque $\Omega_\alpha \neq X$ pour tout $\alpha \in A$, considérer un sous-recouvrement fini $(\Omega_\alpha)_{\alpha\in B}$ et la valeur minimale de l'application $f\colon X \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sum_{\alpha\in B} d(x, X \setminus \Omega_\alpha)$.]

Exercice 3. (Unicité des relèvements)
Soient X un espace topologique et $f\colon X \to S^1$ une application continue. Un *relèvement* de f est une application continue $\tilde{f}\colon X \to \mathbb{R}$ telle que $p\tilde{f} = f$, où p est le revêtement exponentiel de l'exercice 1.
Montrer que si X est connexe, alors deux relèvements de f coïncidant en un point coïncident.

Exercice 4. (Relèvements des chemins)
Soient $f\colon [0,1] \to S^1$ une application continue et $e_0 \in \mathbb{R}$ tel que $p(e_0) = f(0)$. Montrer qu'il existe un unique relèvement $\tilde{f}\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ tel que $\tilde{f}(0) = e_0$.
[*Indication :* considérer une subdivision de $[0,1]$ de pas un nombre de Lebesgue du recouvrement $(f^{-1}(U_\alpha))_\alpha$ de $[0,1]$, où $(U_\alpha)_\alpha$ est le recouvrement de S^1 de l'exercice 1.]

Exercice 5. (Relèvements des homotopies)
Soient $F\colon [0,1]\times[0,1] \to S^1$ une application continue et $e_0 \in \mathbb{R}$ tel que $p(e_0) = F(0,0)$.
a. Montrer qu'il existe un unique relèvement $\widetilde{F}\colon [0,1]\times[0,1] \to \mathbb{R}$ tel que $\widetilde{F}(0,0) = e_0$.
[*Indication :* considérer un quadrillage $[0,1]\times[0,1]$ de pas un nombre de Lebesgue du recouvrement $(F^{-1}(U_\alpha))_\alpha$ de $[0,1]\times[0,1]$.]
b. Montrer que si F est une homotopie à extrémités fixes, alors $\widetilde{F}$ aussi.

Exercice 6. (Degré)

a. Soit $\gamma\colon [0,1] \to S^1$ un lacet basé en 1. Considérons l'unique relèvement $\tilde{\gamma}\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ de γ tel que $\tilde{\gamma}(0) = 0$ (voir l'exercice 4). Montrer que $\tilde{\gamma}(1)$ est un entier qui ne dépend que de $[\gamma] \in \pi_1(S^1, 1)$. On l'appelle le *degré* de (la classe d'homotopie de) γ et on le note

$$\deg([\gamma]) = \tilde{\gamma}(1) \in \mathbb{Z}.$$

b. Montrer que l'application $\deg\colon \pi_1(S^1, 1) \to \mathbb{Z}$ est un morphisme de groupes.

Exercice 7. (Injectivité de ψ)

a. Pour $n \in \mathbb{Z}$, calculer le degré du lacet γ_n défini en préambule.

b. En déduire que l'application $\psi\colon \mathbb{Z} \to \pi_1(S^1, 1)$ définie en préambule est injective.

Exercice 8. (Surjectivité de ψ)

a. Montrer qu'un lacet $\gamma\colon [0,1] \to S^1$ basé en 1 est homotope à γ_n où $n = \deg([\gamma])$.

b. En déduire que ψ est surjective.

Exercice 9. (Conclusion)

Montrer que $\psi\colon \mathbb{Z} \to \pi_1(S^1, 1)$ est un isomorphisme de groupes d'inverse $\deg\colon \pi_1(S^1, 1) \to \mathbb{Z}$.