2017/18 - Master 1 - M414

TD7 - Groupe fondamental 3

Exercice 1. (Groupes fondamentaux)
Déterminer le groupe fondamental du tore $S^1 \times S^1$, du tore solide $B^2 \times S^1$, du cylindre $S^1 \times [0,1]$, du cylindre infini $S^1 \times \mathbb{R}$.

Exercice 2. (Théorème fondamental de l'algèbre)
Le but de l'exercice est de montrer que toute équation

$$z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = 0$$

de degré $n \geq 1$ à coefficients complexes admet (au moins) une racine complexe.
Pour cela, on suppose que le polynôme $P(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ n'a pas de racine et on considère les applications $f\colon S^1 \to S^1$ et $G, H\colon S^1 \times [0,1] \to S^1$ définies par

$$f(z) = \frac{P(z)}{|P(z)|}, \qquad G(z,t) = \frac{P(tz)}{|P(tz)|}, \qquad H(z,t) = \frac{t^n P(z/t)}{|t^n P(z/t)|}.$$

Le *degré* de f est le degré du lacet de γ_f de S^1 basé en 1 défini pour $s \in [0,1]$ par

$$\gamma_f(s) = \frac{f(e^{2i\pi s})}{f(1)} \in S^1.$$

On rappelle (voir l'exercice 6 du TD6) que c'est un entier qui ne dépend que de $[\gamma_f] \in \pi_1(S^1, 1)$.
a. Montrer que le degré de f ne dépend que de sa classe d'homotopie.
b. Montrer que f est de degré nul en considérant G.
c. Montrer que f est de degré n en considérant H.
d. Conclure.

Exercice 3. (Groupes par générateurs et relations)
a. Reconnaître le groupe

$$\langle a, b, c, d, e \mid d = e^2,\ bda = 1,\ ab^{-1}c = 1,\ bc = a,\ de = c \rangle.$$

b. Montrer que les groupes suivants sont isomorphes

$$\langle a, b \mid aba = b \rangle \quad \text{et} \quad \langle x, y \mid x^2y^2 = 1 \rangle.$$

c. Montrer que les groupes suivants ne sont pas isomorphes

$$\langle a, b \mid ba^2b^3 = a,\ abab^2 = 1 \rangle \quad \text{et} \quad \langle x, y \mid y^3xy = x,\ x^5y = y^3x^2 \rangle.$$

Exercice 4. (Somme amalgamée triviale)
Montrer que la somme amalgamée $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) *_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ de $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ au dessus de $\mathbb{Z}$ le long des surjections canoniques $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est le groupe trivial.

Exercice 5. (Espaces correctement pointés)
Soient X un espace topologique et $x_0 \in X$. Ont dit que X est *correctement pointé en* x_0 s'il existe un voisinage ouvert U de x_0 tel que l'identité $\mathrm{id}_U\colon U \to U$ et l'application $c_{x_0}\colon U \to U$ constante égale à x_0 soient homotopes relativement à $\{x_0\}$. En particulier, $\{x_0\}$ est un rétract par déformation de U.
Montrer qu'un espace cellulaire X est correctement pointé en tout $x_0 \in X$.

Exercice 6. (Groupe fondamental d'un bouquet)
Soient X et Y des espace topologiques correctement pointés en $x_0 \in X$ et $y_0 \in Y$, respectivement. Notons $X \vee Y$ le bouquet de X et Y (obtenu de $X \amalg Y$ en identifiant x_0 et y_0) et z_0 le point de $X \vee Y$ représentant x_0 et y_0. Montrer que

$$\pi_1(X \vee Y, z_0) \cong \pi_1(X, x_0) * \pi_1(Y, y_0).$$

Exercice 7. (Bouquet de cercles)
Determiner le groupe fondamental d'un *bouquet* de n cercles, qui est la réunion de n cercles reliés tous ensemble en un seul point.

Exercice 8. (Attachement d'une cellule)
Soient X un espace topologique connexe par arcs et $f\colon S^{n-1} \to X$ une application continue. Notons

$$Y = X \cup_f B^n$$

l'espace topologique obtenu en attachant à X une cellule B^n de dimension n le long de f. Soit $s_0 \in S^{n-1}$, $x_0 = f(s_0) \in X$ et $y_0 = \overline{x_0} \in Y$. Le but de l'exercice est de montrer que

$$\pi_1(Y, y_0) \cong \begin{cases} \pi_1(X, x_0) * \mathbb{Z} & \text{si } n = 1 \text{ et } X \text{ est correctement pointé en } x_0, \\ \pi_1(X, x_0)/N_f & \text{si } n = 2, \\ \pi_1(X, x_0) & \text{si } n \geq 3, \end{cases}$$

où, dans le cas $n = 2$, le groupe N_f est le plus petit sous-groupe distingué de $\pi_1(X, x_0)$ contenant la classe d'homotopie du lacet de X défini par $t \in [0, 1] \mapsto f(e^{2i\pi t})$.

a. Supposons $n = 1$. Montrer que $f\colon S^0 \to X$ est homotope à l'application constante égale à x_0. En déduire que Y à le même type d'homotopie que le bouquet $X \vee S^1$ obtenu en identifiant x_0 et $1 \in S^1$. Conclure en utilisant l'exercice 7.

b. Supposons désormais $n \geq 2$. Soient 0 le centre de la boule B^n et $p\colon B^n \amalg X \to Y$ l'application quotient. On pose :

$$U = p((B^n \setminus \{0\}) \amalg X) \quad \text{et} \quad V = p(B^n \setminus S^{n-1}).$$

Montrer que U, V, et $U \cap V$ sont des ouverts de Y connexes par arcs.

c. Montrer que V est simplement connexe.

d. Montrer que $U \cap V$ est un rétract par déformation de $p(S^{n-1}_{1/2})$, où $S^{n-1}_{1/2} \subset B^n$ est la sphère de centre 0 et de rayon $1/2$.

e. Montrer que $p(X)$ est un rétract par déformation de U via une rétraction $r\colon U \to p(X)$ telle que $rp(x/2) = pf(x)$ pour tout $x \in S^{n-1}$.

f. En déduire qu'il existe un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \pi_1(S^{n-1}, s_0) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "f_*"'] & \pi_1(U \cap V, p(s_0/2)) \arrow[d, "j_*"] \\ \pi_1(X, x_0) & \pi_1(U, p(s_0/2)). \arrow[l, "\cong"'] \end{tikzcd}$$

où les flèches horizontales sont des isomorphismes de groupes et $j\colon U \cap V \hookrightarrow U$ est l'inclusion.

f. Conclure.

Exercice 9. (Bouteille de Klein)
Déterminer le groupe fondamental de la *bouteille de Klein* définie par

$$K = [0, 1]^2/\mathcal{R},$$

où $\mathcal{R}$ est la relation d'équivalence engendrée par $(s, 0) \sim (s, 1)$ et $(0, t) \sim (1, 1 - t)$ pour $s, t \in [0, 1]$.

Exercice 10. (Groupes fondamentaux des espaces projectifs)

a. Montrer que les espaces projectifs complexes $\mathbb{CP}^n$ sont simplement connexes.
[*Indication :* utiliser les exercices 4.d et 7.b du TD2.]

b. Montrer que les groupes fondamentaux des espaces projectifs réels sont

$$\pi_1(\mathbb{RP}^1) \cong \mathbb{Z} \quad \text{et} \quad \pi_1(\mathbb{RP}^n) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \quad \text{pour } n \geq 2.$$

[*Indication :* montrer que $\mathbb{RP}^1 \cong S^1$ et conclure en utilisant l'exercice 7.b du TD2.]

Exercice 11. (Groupes de présentation finie comme groupes fondamentaux)
Montrer que tout groupe de présentation finie est le groupe fondamental d'un espace topologique.
[*Indication :* si $G \cong \langle g_1, \ldots, g_m \,|\, r_1, \ldots, r_n \rangle$, attacher n cellules B^2 au bouquet de m cercles.]