

Dans cette feuille d'exercices, les complexes de chaînes considérés sont des complexes de chaînes de groupes abéliens de la forme

$$C = (\cdots \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \cdots \xrightarrow{\partial_2} C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\partial_0} 0).$$

Exercice 1.

Soit $f: A \rightarrow B$ un morphisme de complexes de chaînes.

Montrer que $\text{Ker}(f)$, $\text{Im}(f)$ et $B/\text{Im}(f)$ sont des complexes de chaînes.

Exercice 2. (Lemme des cinq)

Considérons le diagramme commutatif suivant, à lignes exactes, formé de groupes abéliens et de morphismes de groupes :

$$\begin{array}{ccccccccc}
 A_1 & \xrightarrow{f_1} & A_2 & \xrightarrow{f_2} & A_3 & \xrightarrow{f_3} & A_4 & \xrightarrow{f_4} & A_5 \\
 \downarrow \varphi_1 & & \downarrow \varphi_2 & & \downarrow \varphi_3 & & \downarrow \varphi_4 & & \downarrow \varphi_5 \\
 B_1 & \xrightarrow{g_1} & B_2 & \xrightarrow{g_2} & B_3 & \xrightarrow{g_3} & B_4 & \xrightarrow{g_4} & B_5.
 \end{array}$$

Le but de l'exercice est de montrer que si $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_4, \varphi_5$ sont des isomorphismes, alors φ_3 aussi.

- Montrer que si φ_1 est surjective et φ_2, φ_4 sont injectives, alors φ_3 est injective.
- Montrer que si φ_2, φ_4 sont surjectives et φ_5 est injective, alors φ_3 est surjective.
- Conclure.

Exercice 3.

Considérons le diagramme commutatif suivant de complexes de chaînes à lignes exactes :

$$\begin{array}{ccccccccc}
 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow f & & \downarrow g & & \downarrow h & & \\
 0 & \longrightarrow & D & \longrightarrow & E & \longrightarrow & F & \longrightarrow & 0.
 \end{array}$$

Montrer que si deux des applications f, g, h induisent des isomorphismes en homologie, alors il en est de même pour la troisième.

Indication : appliquer le lemme des cinq aux suites exactes longues induites en homologie.

Exercice 4. (Homologie singulière vs groupe fondamental)

Soient X un espace topologique et $x_0 \in X$. Considérons le 1-simplexe standard

$$\Delta_1 = \{(t_0, t_1) \in \mathbb{R}^2 \mid t_0 \geq 0, t_1 \geq 0, t_0 + t_1 = 1\}$$

et l'homéomorphisme $\omega: \Delta_1 \rightarrow [0, 1]$ défini par $\omega(t_0, t_1) = t_0$. A tout chemin $f: [0, 1] \rightarrow X$ on associe un 1-simplexe singulier $h(f) = f\omega: \Delta_1 \rightarrow X$.

- Montrer que si α est un lacet de X , alors $h(\alpha)$ est un 1-cycle.
Montrer que si α et α' sont des lacets homotopes, alors $h(\alpha)$ et $h(\alpha')$ sont homologues.
- Montrer que la correspondance h induit un morphisme de groupes

$$H: \pi_1(X, x_0)_{\text{ab}} \rightarrow H_1(X),$$

appelé le morphisme de Hurewicz, où $\pi_1(X, x_0)_{\text{ab}}$ désigne l'abélianisé du groupe $\pi_1(X, x_0)$.

- On souhaite démontrer le théorème de Hurewicz : si X est connexe par arcs, alors H est un isomorphisme :

$$H_1(X) \cong \pi_1(X, x_0)_{\text{ab}}.$$

Pour cela, pour chaque $x \in X$, on choisit un chemin γ_x d'origine x_0 et d'extrémité x . A chaque 1-simplexe singulier $\sigma: \Delta_1 \rightarrow X$, on associe un lacet $\psi(\sigma)$ de X basé en x_0 défini par

$$\psi(\sigma) = \gamma_{f(0)} \cdot (\sigma\omega^{-1}) \cdot \overline{\gamma_{f(1)}}.$$

En étendant par linéarité l'application $\sigma \mapsto [\psi(\sigma)] \in \pi_1(X, x_0)_{\text{ab}}$, on obtient un morphisme de groupes $S_1(X) \rightarrow \pi_1(X, x_0)_{\text{ab}}$. Montrer que ce morphisme induit un morphisme de groupes

$$\Psi: H_1(X) \rightarrow \pi_1(X, x_0)_{\text{ab}}.$$

d. Montrer que Ψ et H sont inverses l'un de l'autre.

Indication : montrer que si σ est un 1-simplexe singulier de X , alors la classe d'homologie de $h(\psi(\sigma))$ est représentée par le cycle $f + \gamma_{f(0)} - \gamma_{f(1)}$.

e. Conclure.

Exercice 5. (Théorème du point fixe de Brouwer)

Le but de l'exercice est de montrer que toute application continue $f: B^n \rightarrow B^n$ possède un point fixe.

a. Vérifier que le résultat est vrai pour $n = 0$ et $n = 1$.

b. On suppose que $n \geq 2$. Montrer qu'il n'existe pas de rétraction du disque B^n sur le cercle S^{n-1} .

Indication : dans le cas contraire, considérer le morphisme induit entre les $(n - 1)$ -ièmes groupes d'homologie singulière et utiliser que $H_{n-1}(S^{n-1}) \cong \mathbb{Z}$ et $H_{n-1}(B^n) \cong 0$.

c. Soit $f: B^n \rightarrow B^n$ une application continue sans point fixe. Montrer l'application qui envoie $x \in B^n$ sur l'intersection de la demi-droite ouverte $]f(x), x)$ de \mathbb{R}^n avec la sphère S^{n-1} est une rétraction de B^n sur S^{n-1} .

d. Conclure

Exercice 6. (Homologie cellulaire)

Soit X un CW-complexe fini. Rappelons que X est un espace topologique (nécessairement compact) muni d'une filtration $X_0 \subset X_1 \subset \dots \subset X_N = X$ par des sous-espaces topologiques tels que X_0 est un espace discret fini et chaque X_n s'obtient à partir de X_{n-1} par recollement d'un nombre fini de n -cellules le long d'applications continues $f_i: S^{n-1} \rightarrow X_{n-1}$. Le sous-espace X_n est l'union de toutes les cellules de X de dimension $\leq n$ et s'appelle le n -squelette de X .

a. Montrer que l'on a les propriétés suivantes :

- $H_q(X_n) = 0$ pour $q > n$,
- $H_q(X) \cong H_q(X_{n+1})$ pour $q \leq n$,
- Pour tout n , il existe une suite exacte longue

$$0 \longrightarrow H_n(X_n) \xrightarrow{p_n} H_n(X_n, X_{n-1}) \xrightarrow{\delta_n} H_{n-1}(X_{n-1}) \xrightarrow{q_n} H_{n-1}(X_n) \longrightarrow 0$$

extraite de la suite exacte longue de la paire (X_n, X_{n-1}) .

b. Montrer que

$$\text{Cell}_n(X) = H_n(X_n, X_{n-1}).$$

est un groupe abélien libre dont le rang est le nombre de n -cellules de X .

c. Considérons les applications de bord

$$\partial_n = p_{n-1} \circ \delta_n: \text{Cell}_n(X) \rightarrow \text{Cell}_{n-1}(X).$$

Montrer que cela définit un complexe de chaînes noté $\text{Cell}(X)$.

d. Montrer que l'homologie de $\text{Cell}(X)$ est isomorphe à l'homologie singulière de X : pour tout $n \geq 0$,

$$H_n(\text{Cell}(X)) \cong H_n(X).$$

Exercice 7. (Homologie des espaces projectifs complexes)

Soit $n \geq 1$. L'espace projectif complexe $\mathbb{C}P^n$ a une structure de CW-complexe fini avec une cellule en dimension paire q avec $0 \leq q \leq 2n$ (voir l'exercice 7 de la feuille TD2). En utilisant l'exercice précédent, montrer que

$$H_q(\mathbb{C}P^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } q \text{ pair et } 0 \leq q \leq 2n, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$