Université de Lille

**2020/21 - Master 1 - Topologie algébrique**

**Devoir Maison**

---

Le but de ce DM est de bien rédiger, individuellement (!) et en faisant référence aux idées et aux résultats des §3-4 du Chapitre 2 du cours, une preuve complète du théorème de relèvement des applications :

**Théorème :** Soit $p\colon E \to B$ un revêtement, $X$ un espace connexe par arcs et localement connexe par arcs, $f\colon X \to B$ une application continue, $x_0 \in X$ un point, et $e_0 \in E$ un point tel que $f(x_0) = p(e_0) =: b_0$. Alors il existe un (unique) relèvement $\tilde{f}\colon X \to E$ de $f$ au travers de $p$ tel que $\tilde{f}(x_0) = e_0$, si et seulement si on a l'inclusion $f_\sharp(\,\pi_1(X, x_0)\,) \subseteq p_\sharp(\,\pi_1(E, e_0)\,)$ dans $\pi_1(B, b_0)$.

Nous avons déjà remarqué que l'implication $\Rightarrow$ est une conséquence immédiate de la fonctorialité de $\pi_1$. Pour démontrer $\Leftarrow$, il nous faut construire l'application $\tilde{f}$ en supposant l'inclusion. Nous procédons par étapes, en utilisant plusieurs fois les propriétés de relèvement des chemins et des homotopies connues :

**Exercice 1. (Relèvement des $f$-chemins)**
Soient $\gamma, \mu\colon I \to X$ deux chemins $x_0 \rightsquigarrow x$ dans $X$, et soient $f \circ \gamma, f \circ \mu$ les chemins $f(x_0) \rightsquigarrow f(x)$ de $B$ correspondants. Soient $\widetilde{f \circ \gamma}$ et $\widetilde{f \circ \mu}$ des relèvement de $f \circ \gamma$ et $f \circ \mu$ au travers de $p$, d'origine commune $e_0$. On veut montrer que les points d'arrivée sont aussi égaux : $(\widetilde{f \circ \gamma})(1) = (\widetilde{f \circ \mu})(1)$.
**a.** Montrez la conclusion souhaitée au cas où les chemins $\gamma$ et $\mu$ sont homotopes.
**b.** Pour $\gamma$ et $\mu$ quelconques, montrez que le lacet $f \circ (\gamma\mu^{-1})$ se relève en un lacet $f \circ \widetilde{(\gamma\mu^{-1})}$ basé en $e_0$.
[*Idée : utilisez l'hypothèse sur les groupes fondamentaux, ainsi que le cas spécial de la partie a.*]
**c.** Conclure que $(\widetilde{f \circ \gamma})(1) = (\widetilde{f \circ \mu})(1)$ pour $\gamma$ et $\mu$ quelconques (faites un dessin !).

**Exercice 2. (Définition du relèvement)**
Pour $x \in X$, posons $\tilde{f}(x) := (\widetilde{f \circ \gamma})(1)$ où $\gamma$ est un chemin $x_0 \rightsquigarrow x$ dans $X$ et $\widetilde{f \circ \gamma}$ le relèvement de $f \circ \gamma$ d'origine $e_0$.
**a.** Vérifiez que ceci donne une application $\tilde{f}\colon X \to E$ bien définie.
**b.** Vérifiez que $p \circ \tilde{f} = f$.
**c.** Vérifiez que $\tilde{f}(x_0) = e_0$.

**Exercice 3. (Continuité du relèvement)**
Soit $\tilde{f}\colon X \to E$ l'application définie dans l'Exercice 2.
**a.** Vérifiez que, pour conclure que $\tilde{f}$ est continue, il suffit de démontrer que $\tilde{f}^{-1}(U_i)$ est un ouvert de $X$ pour tout feuillet $U_i$ au-dessus d'un ouvert trivialisant $U$ de $B$ quelconque.
**b.** Soit $U_i$ un feuillet au-dessus d'un ouvert trivialisant $U$ de $B$, comme dans la partie précédente. Montrez qu'il existe un ouvert $V_x$ de $X$ tel que $x \in V_x \subseteq \tilde{f}^{-1}(U_i)$.
[*Idée : choisir un ouvert connexe par arcs contenu dans $f^{-1}(U)$ et montrer qu'il est dans $\tilde{f}^{-1}(U_i)$.*]
**c.** Conclure !

*À rendre pour le vendredi 9 avril 2021*