2020/21 - MASTER 1 - TOPOLOGIE ALGÉBRIQUE

DEVOIR SURVEILLÉ N°1 - 8 MARS 2021

Consignes : pas de documents, pas de téléphone, tous les mobiles rangés.
Durée : 2h.

Exercice 1. (Question de cours)
a. Qu'est-ce que la *topologie quotient* ?
b. Qu'est-ce qu'une *variété topologique de dimension* n ?

Exercice 2. (Vrai ou faux)
Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses, en justifiant votre réponse par une courte preuve ou un contre-exemple selon le cas :
a. Toute bijection continue est un homéomorphisme.
b. Tout quotient d'un espace topologique discret est un espace topologique discret.
c. Les espaces $\mathbb{R}$ et $[0,1[$ sont homéomorphes.
d. Les espaces $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ et S^1 sont homéomorphes.
e. Les espaces $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ et S^1 ont le même type d'homotopie.

Exercice 3. (Suspension des sphères)
La *suspension* $\Sigma(X)$ d'un espace topologique X est l'espace topologique quotient

$$\Sigma(X) = (X \times [0,1])/\sim$$

où $\sim$ est la relation d'équivalence sur le produit $X \times [0,1]$ qui identifie $(x,0) \sim (y,0)$ et $(x,1) \sim (y,1)$ pour tout $x, y \in X$. Montrer que $\Sigma(S^n)$ est homéomorphe à S^{n+1} pour tout $n \geq 0$.
[*Indication :* considérer l'application $S^n \times [0,1] \to S^{n+1} \subset \mathbb{R}^{n+2} = \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}$, $(x,t) \mapsto (\sin(\pi t)x, \cos(\pi t))$.]

Exercice 4. (L'espace projectif réel comme quotient d'une action)
Soit $n \geq 1$. Par définition, l'*espace projectif réel* $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ est l'ensemble des droites vectorielles dans $\mathbb{R}^{n+1}$ muni de la topologie quotient de l'application $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}\mathrm{P}^n$, $x \mapsto \mathrm{Vect}(x)$.
D'autre part, le groupe à deux éléments $C_2 = \{\pm 1\}$ agit sur la sphère S^n par multiplication scalaire. Montrer que l'espace quotient de cette action S^n/C_2 est homéomorphe à $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$.