TD1 - Topologie générale : notions basiques

Exercice 1.
Soit X un ensemble. Vérifier que l'ensemble vide et les complémentaires des parties finies de X forment une topologie sur X, appelée *topologie cofinie*.

Exercice 2.
Vérifier que la famille de parties $\{\,[0,2]\,\} \cup \{\,[0,x[\, : \ x \in [0,2]\,\}$ définit une topologie sur l'intervalle $[0,2]$. On l'appellera la *topologie bizarre* sur $[0,2]$ et on l'utilisera occasionnellement en contre-exemple pour certaines propriétés.

Exercice 3. (Topologie engendrée)
Soient X un ensemble et $\mathcal{B}$ un ensemble de parties de X.

a. Montrer qu'il existe une plus petite (au sens de l'inclusion) topologie sur X contenant $\mathcal{B}$, appelée la *topologie engendrée par* $\mathcal{B}$.

b. Montrer qu'une partie de X est ouverte pour la topologie engendrée par $\mathcal{B}$ si et seulement si elle est une union (quelconque) d'intersections finies d'éléments de $\mathcal{B}$ (en convenant ici que l'intersection indexée par l'ensemble vide est X).

c. Soient X, Y deux espaces topologiques et $\mathcal{B}$ un ensemble de parties de Y qui engendre la topologie de Y. Montrer qu'une application $f\colon X \to Y$ est continue si et seulement si $f^{-1}(B)$ est un ouvert de X pout tout $B \in \mathcal{B}$.

Exercice 4. (Topologie produit)
Soient X et Y deux espaces topologiques. On munit $X \times Y$ de la *topologie produit*, c'est-à-dire de la topologie engendrée par la famille des "pavés ouverts" $\mathcal{B} = \{U \times V \,|\, U \text{ ouvert de } X, V \text{ ouvert de } Y\}$.

a. Rappelons qu'une application $f\colon Z \to X \times Y$, où Z est un espace topologique, est continue si et seulement si les deux applications $p_X \circ f\colon Z \to X$ et $p_Y \circ f\colon Z \to Y$ sont continues, où $p_X\colon X \times Y \to X$ et $p_Y\colon X \times Y \to Y$ sont les projections. Montrer que si $f_1\colon X_1 \to Y_1$ et $f_2\colon X_2 \to Y_2$ sont continues, alors l'application $f_1 \times f_2\colon X_1 \times X_2 \to Y_1 \times Y_2$ définie par $(f_1 \times f_2)(x_1, x_2) := (f_1(x_1), f_2(x_2))$ est continue.

b. Il est faux de conjecturer qu'une application $f\colon X \times Y \to Z$ est continue si elle est continue en chaque variable séparément ! En effet, vérifier que si f est continue alors ses *applications partielles* $f_a\colon Y \to Z$ et $f^b\colon X \to Z$ définies par $f_a(y) := f(a, y)$ et $f^b(x) := f(x, b)$ sont continues pour tout $a \in X$ et tout $b \in Y$, mais que la réciproque est fausse. (*Indication:* on pourra considérer l'application $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ donnée par $f(0,0) = 0$ et $f(x,y) = xy/(x^2 + y^2)$ pour $(x, y) \neq (0,0)$.)

Exercice 5. (Topologie induite)

a. Soient X un espace topologique, ayant O_X pour topologie, et A est une partie de X. Verifier que

$$O_X|_A := \{U \cap A \,|\, U \in O_X\}$$

est une topologie sur A, appelée *topologie induite* sur A par X. Un *sous-espace topologique* de X est une partie de X munie de la topologie induite par X.

b. Soient X, Y des espaces topologiques, A un sous-espace topologique de X et B un sous-espace topologique de Y. Montrer que la topologie produit sur $A \times B$ coïncide avec la topologie induite sur $A \times B$ par $X \times Y$.

c. La *boucle d'oreille hawaïenne* est l'union $C = \cup_{n \geq 1} C_n$ des cercles C_n de centre $(1/n, 0)$ et de rayon $1/n$. On munit C de la topologie induite par $\mathbb{R}^2$. Montrer que l'application $f\colon C \to C$, définie par $f(x,y) = (nx, ny)$ pour $(x,y) \in C_n$, n'est pas continue.

Exercice 6. (La projection stéréographique)
Soit $N := (0, \ldots, 0, 1)$ le pôle nord de la sphère $S^n = \{x = (x_1, \ldots, x_{n+1}) \mid \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$. La *projection stéréographique* (de pôle N) est l'application $p\colon S^n \smallsetminus \{N\} \to \mathbb{R}^n$ qui associe à tout point $x \in S^n \smallsetminus \{N\}$ l'unique point $p(x)$ de $\mathbb{R}^n$ tel que les trois points N, x et $p(x)$ soient allignés dans $\mathbb{R}^{n+1}$.
a. Faire un dessin illustrant la situation pour $n = 1$ et $n = 2$.
b. Calculer les coordonnés de $p(x)$ (pour un n quelconque).
c. Montrer que p est un homéomorphisme $S^n \smallsetminus \{N\} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n$.