TD2 - Propriétés basiques des espaces

Exercice 1. (Espaces séparés)
Un espace topologique est *séparé* si deux points distincts de l'espace admettent toujours des voisinages ouverts disjoints.

a. Montrer que, dans un espace séparé, tout sous-ensemble de la forme $\{x\}$ (un "singleton") est fermé.

b. Montrer qu'un espace topologique X est séparé si et seulement si la diagonale $\Delta = \{(x, x) \mid x \in X\}$ est un fermé de $X \times X$.

c. Soit $f : X \to Y$ une application continue avec Y séparé. Montrer que le *graphe* de f, défini comme l'ensemble $\Delta_f = \{(x, f(x)) \mid x \in X\}$, est un fermé de $X \times Y$.

Exercice 2. (Compacts de $\mathbb{R}^n$: le théorème de Heine-Borel)
Un espace topologique est *compact* si de tout recouvrement ouvert on peut extraire un recouvrement fini. (*Attention:* dans certains contextes, un tel espace est dit *quasi-compact* tandis que l'adjectif *compact* est réservé pour les espaces qui sont compacts et séparés.)

a. Montrez que les segments de $\mathbb{R}$ – c'est à dire les intervalles bornés et fermés – sont des compacts de $\mathbb{R}$. (*Indication*: étant donné un recouvrement ouvert de $[a, b]$, on écrit E pour l'ensemble $\{x \in [a, b] \mid [a, x]$ admet un sous-recouvrement fini $\}$. On montre $b \in E$ par l'absurde.)

b. Une partie de $\mathbb{R}^n$ est *bornée* si elle est incluse dans un pavé $\prod_{1 \leq i \leq n} [a_i, b_i]$. Déduisez de **a.** et des résultats généraux du cours que les ensembles fermés bornés de $\mathbb{R}^n$ sont compacts.

c. Réciproquement, montrez que les compacts de $\mathbb{R}^n$ (ou, en fait, d'un espace métrique quelconque !) sont fermés et bornés.

Exercice 3. (Normalité des espaces compacts séparés)
Démontrez qu'un espace topologique compact et séparé est normal. (Un espace topologique est *normal*, ou *T4*, si deux fermés disjoints sont séparés par deux ouverts disjoints.)

Exercice 4. (Connexité)
Un espace topologique est *connexe* s'il ne peut pas s'écrire comme réunion de deux ouverts disjoints. Toute image continue d'un espace connexe est connexe.

a. Une partie C d'un espace topologique est *connexe* si C munie de la topologie induite est un espace topologique connexe. Montrer qu'une partie C d'un espace topologique X est connexe si et seulement si pour tous ouverts U, V de X tels que $U \cap V \cap C = \emptyset$ et $C \subseteq U \cup V$, on a : $C \subseteq U$ ou $C \subseteq V$.

b. Montrer que l'image d'une partie connexe par une application continue est connexe.

c. Montrer que l'union de parties connexes ayant un point en commun est connexe.

d. Montrer que le produit de deux espaces topologiques connexes est connexe.

e. Montrer que si C est une partie connexe d'un espace topologique X, alors toute partie A de X telle que $C \subseteq A \subseteq \overline{C}$ est connexe.

Exercice 5. (Parties connexes de $\mathbb{R}$)

a. Montrons la connexité des segments $[a, b]$ (c'est à dire, des intervalles fermés bornés) :

(i) Soit F_1 et F_2 deux fermés disjoints de $\mathbb{R}$ tels que $F_1 \cup F_2 = [a, b]$. Montrez que la fonction $f : F_1 \times F_2 \to \mathbb{R}$ telle que $f(x, y) = |x - y|$ admet un minimum δ strictement positif.

(ii) Soit n tel que $|b - a|/n < \delta$. Posons $a_i = a + i(b - a)/n$. Montrez que si $a \in F_1$ alors pour $0 \leq i \leq n$ on a $[a, a_i] \subseteq F_1$. En déduire que $[a, b]$ est connexe.

b. Soit $X \subseteq \mathbb{R}$. Montrez que les trois assertions suivantes sont équivalentes:
(i) X est connexe, (ii) X est connexe par arcs, (iii) X est un intervalle.

Exercice 6. (Connexité par arcs dans un evn)
Soit $E = (E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé réel.

a. Une partie $A \subseteq E$ est *convexe* si pour tout couple $x, y \in A$, le *segment* $[x, y] := \{tx+(1-t)y \mid t \in [0, 1]\}$ est contenu dans A. Montrer qu'une partie convexe de E est connexe par arcs, donc connexe.

b. Montrer que si $\dim(E) \geq 2$ et F est une partie finie de E, alors les sous-espace $E \setminus F$ est connexe par arcs, donc connexe.

c. Si par contre $\dim(E) = 1$ et $x \in E$, alors $E \setminus \{x\}$ est non-connexe, donc non-connexe par arcs.

Exercice 7.
Montrer que l'adhérence de $\{(x, \sin(1/x)) \mid x > 0\} \subset \mathbb{R}^2$ est connexe mais n'est pas connexe par arcs.

Exercice 8.
L'intervalle $[0, 1]$ et le carré $[0, 1] \times [0, 1]$ sont-ils homéomorphes ?

Exercice 9. (Composantes connexes et composantes connexes par arcs)
Soit X un espace topologique. Les *composantes connexes* de X sont les classes d'équivalences de la relation d'équivalence sur X définie par $x \sim y$ s'il existe une partie connexe de X contenant x et y. Les *composantes connexes par arcs* de X sont les classes d'équivalences de la relation d'équivalence sur X définie par $x \approx y$ s'il existe un chemin de x vers y (voir le cours).

a. Montrer que les composantes connexes de X sont des parties fermées connexes disjointes dont l'union est X, et que toute partie connexe non vide de X est contenue dans une unique composante connexe.

b. Montrer que les composantes connexes par arcs de X sont des parties connexes par arcs disjointes dont l'union est X, et que toute partie connexe par arcs non vide de X est contenue dans une unique composante connexe par arcs.

c. Montrer que toute composante connexe par arcs de X est contenue dans une unique composante connexe de X.

d. Montrer que si X est *localement connexe par arcs* (i.e., si tout voisinage de tout point x contient un voisinage de x connexe par arcs), alors les composantes connexes par arcs de X sont les composantes connexes de X.

e. En déduire que toute partie connexe ouverte d'un espace vectoriel normé de dimension finie est connexe par arcs.

Exercice 10.
Montrer que si un espace topologique X est une réunion disjointe d'ouverts connexes, alors les composantes connexes de X sont ces ouverts connexes.

Exercice 11.
Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est connexe.
(*Indication :* pour $A, B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, étudier l'application $t \mapsto \det(tA + (1-t)B)$ et ses zéros.)

Exercice 12.
L'espace $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est-il connexe ?

Exercice 13. (Compactification d'Alexandroff)
Soit X un espace topologique.

a. Soit $X^+ := X \cup \{\infty\}$ (pour $\infty \notin X$). Vérifiez que la famille constituée des ouverts de X, et des ensembles de la forme $(X \setminus K) \cup \{\infty\}$ pour K un compact fermé de X, forme une topologie sur X^+.

b. Vérifiez que la topologie de **a.** fait de X^+ un espace compact, et que l'inclusion $X \hookrightarrow X^+ \setminus \{\infty\}$ est un homéomorphisme. On appelle l'espace X^+ le *compactifié d'Alexandroff de X*.

c. Montrez que si K est compact séparé et $x \in K$, alors $(K \setminus \{x\})^+$ est homéomorphe à K. En déduire que $(\mathbb{R}^n)^+$ est homéomorphe à S^n. (D'autres exemples seront donnés dans les prochaines feuilles de TD).

e. Un espace X est dit *localement compact* si tout point de X est contenu dans l'intérieur d'un compact de X. Montrez que X^+ est séparé si et seulement si X est séparé et localement compact.