# 2020/21 - Master 1 - Topologie algébrique

# TD3 - Espaces quotients et variétés

**Exercice 1. (Cônes d'espaces topologiques)**
Le *cône* d'un espace topologique $X$ est l'espace quotient $C(X) = (X \times [0,1])/(X \times \{0\})$.
Montrer que $C(S^{n-1}) \cong D^n$.

**Exercice 2. (La droite de Hausdorff)**
Soit $X := ((\mathbb{R} \times \{1\}) \cup (\mathbb{R} \times \{2\}))/\sim$ l'espace quotient obtenu en recollant deux droites euclidiennes le long des identifications $(r,1) \sim (r,2)$ pour tout $r \neq 0$.
**a.** Vérifier que $X$ n'est pas séparé donc n'ést pas une variété topologique.
**b.** Démontrer que, néanmoins, $X$ est localement homéomorphe à $\mathbb{R}$ (en *tout* point !).

**Exercice 3. (Un quotient sauvage)**
On considère l'action de $\mathbb{Q}$ sur $\mathbb{R}$ par translation.
**a.** Montrer que chaque point de $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ est contenu dans chaque voisinage ouvert de chaque autre point !
**b.** En déduire que $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ n'est pas séparé.
**c.** En déduire aussi qu'*aucun* point de $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ n'admet un voisinage homéomorphe à $\mathbb{R}^n$, pour aucun $n$.

**Exercice 4. (Les tores comme quotient d'une action)**
Pour $n \geq 1$, considérons le groupe $\mathbb{Z}^n$ agissant sur $\mathbb{R}^n$ par translation : $nx = n + x$.
**a.** Vérifier que $\mathbb{Z}^n$ agit librement et par homéomorphismes sur $\mathbb{R}^n$.
**b.** Démontrer que cette action est propre (voir Ch.I §5.d du cours). En déduire par les résultats du cours que l'espace quotient $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ est une variété topologique de dimension $n$.
**c.** Vérifier que le $n$-cube $[0,1]^n$ est un domaine fondamentale pour l'action (voir Ch.I §5 p.10). En déduire que $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n \cong [0,1]^n/\sim$ pour une relation d'équivalence sur la frontière $\partial([0,1]^n)$.
**d.** Démontrer que l'espace quotient est homéomorphe au $n$-tore : $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n \cong (S^1)^n$.

**Exercice 5. (Une action non propre)**
Démontrer que l'action du groupe $\mathbb{Z}$ sur l'espace $\mathbb{R}$ définie par $nx := 2^n x$ n'est pas propre.

**Exercice 6. (Espaces projectifs complexes)**
On rappelle que l'*espace projectif complexe de dimension* $n \geq 1$ est l'ensemble des droites vectorielles dans $\mathbb{C}^{n+1}$ muni de la topologie quotient associée à la surjection $\pi \colon \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}P^n$, $z \mapsto \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}(z)$.
**a.** Montrer que $\mathbb{C}P^n$ est séparé.
**b.** On identifie $S^{2n+1}$ et $\{z = (z_0, \ldots z_n) \mid |z_0|^2 + \ldots + |z_n|^2 = 1\}$, la sphère unité de $\mathbb{C}^{n+1}$. On fait agir le groupe $\mathrm{U}(1) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ des complexes de module 1 sur $S^{2n+1}$ par multiplication scalaire. Montrer que $\mathbb{C}P^n \cong S^{2n+1}/\mathrm{U}(1)$.
**c.** Démontrer que $\mathbb{C}P^n$ est compact, connexe et connexe par arcs.
**d.** De façon similaire, démontrer que $\mathbb{C}P^n \cong (\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\})/\mathbb{C}^*$, où on fait agir le groupe multiplicatif $\mathbb{C}^*$ sur $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ par multiplication scalaire.
**e.** Démontrer que $\mathbb{C}P^1 \setminus \{x\} \cong \mathbb{R}^2$, où $x$ est un point fixé quelconque. À l'aide de la compactification d'Alexandroff (Exo 13 du TD2), en déduire que $\mathbb{C}P^1 \cong S^2$. En déduire que $S^3/\mathrm{U}(1) \cong S^2$.
(*Indication :* comparer avec le cas analogue de $\mathbb{R}P^n$ traité dans le cours.)