Université de Lille

**2020/21 - Master 1 - Topologie algébrique**

**TD4 - Homotopie**

---

**Exercice 1. (Équivalence homotopique)**
Montrer qu' "avoir le même type d'homotopie" est une relation d'équivalence sur les espaces topologiques.

**Exercice 2. (Retractes par déformations et homotopie)**
Soit $A \subset X$ un sous-espace d'un espace topologique $X$, et notons $i\colon A \to X$ l'inclusion.
Vérifier que se donner une rétraction par déformation $R\colon X \times I \to X$ de $X$ sur $A$ est exactement la même chose que de se donner une une *rétraction continue* $r$ de $X$ sur $A$ (une application continue $r\colon X \to A$ telle que $r \circ i = \mathrm{Id}_A$) et une homotopie $i \circ r \sim \mathrm{Id}_X$ *relative à* $A$ (qui laisse $A$ invariant).

**Exercice 3. (Espaces contractiles et retractes par déformations)**
Montrer qu'un espace non-vide est contractile (c'est à dire, a le type d'homotopie d'un point) si et seulement si chaque $x \in X$ est un retracte par déformation de $X$.

**Exercice 4. (Inverse homotopique)**
Montrer qu'une équivalence homotopique peut admettre plusieurs inverses homotopiques.
[*Indication* : il suffit de considérer l'unique application $X \to \{*\}$ pour un $X$ contractile et assez grand.]

**Exercice 5. (Contractilité des cônes)**
Soit $C(X) = (X \times [0,1])/(X \times \{0\})$ le cône d'un espace topologique $X$ (voir l'Ex. 1 du TD3), et notons par $i_X\colon X \to C(X)$ l'identification $x \mapsto (x,1)$ de $X$ avec la 'base' du cône. Montrer :
**a.** Le cône $C(X)$ de tout espace topologique $X$ est contractile.
**b.** Tout espace $X$ est homéomorphe à un sous-espace d'un espace contractile.
**c.** Une application continue $f\colon X \to Y$ est homotope à une application constante si et seulement si $f$ se prolonge le long de $i_X$ en une application continue $\tilde{f}\colon C(X) \to Y$.

**Exercice 6. (Exemples d'espaces ayant même type d'homotopie)**
Montrer que les espaces topologiques suivants ont le même type d'homotopie.
**a.** Un espace topologique $X$ et le produit $X \times [0,1]$.
**b.** Le tore privé d'un point $T^2 \setminus \{x\}$ et le bouquet de deux cercles $S^1 \vee S^1$.
[*Indication* : utiliser la description de $T^2$ comme d'un carré modulo des identifications sur le bord.]
**c.** Le cercle $S^1$ et le complémentaire d'un cercle dans $S^3$.
**d.** Le groupe orthogonal $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et le groupe linéaire $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.
[*Indication* : voir l'orthogonalisation de Gram-Schmidt comme une rétraction par déformation.]

**Exercice 7. (Type d'homotopie et $\pi_0$)**
Nous notons $\pi_0(X)$ l'ensemble des composantes connexes par arcs de l'espace $X$.
**a.** Montrer que $\pi_0$ est *fonctoriel* pour les applications continues, c'est à dire que :
**i.** Toute application continue $f\colon X \to Y$ induit une application $\pi_0(f)\colon \pi_0(X) \to \pi_0(Y)$ bien définie, par la formule $\pi_0(f)([x]) = [f(x)]$ (où $[x]$ denote la composante d'un point $x$).
**ii.** Si $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ sont deux applications continues composables, alors $\pi_0(g) \circ \pi_0(f) = \pi_0(g \circ f)$.
**iii.** De plus, $\pi_0(\mathrm{Id}_X) = \mathrm{Id}_{\pi_0(X)}$ pour tout $X$.
**b.** Montrer que $\pi_0$ est *invariant par homotopie*, c'est à dire : si $f \sim g$ alors $\pi_0(f) = \pi_0(g)$.
**c.** Déduire des points précédents que toute équivalence d'homotopie $f\colon X \to Y$ induit une bijection $\pi_0(f)\colon \pi_0(X) \xrightarrow{\sim} \pi_0(Y)$ entre composantes connexes par arcs.