

**Exercice 1. (Composantes connexes et groupe fondamental)**

Soient  $X$  un espace topologique et  $x_0 \in X$ . Notons  $C$  la composante connexe par arcs de  $x_0$ .  
Montrer que l'inclusion  $i: C \hookrightarrow X$  induit un isomorphisme de groupes  $\pi_1(C, x_0) \xrightarrow{\sim} \pi_1(X, x_0)$ .

**Exercice 2. (Groupe fondamental d'un produit)**

Soient  $X, Y$  deux espaces topologiques,  $x_0 \in X$  et  $y_0 \in Y$  deux points.

- Montrez qu'il existe un isomorphisme de groupes  $\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \cong \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$ .
- Montrez que le produit  $X \times Y$  est simplement connexe si et seulement si ses facteurs  $X, Y$  le sont.
- Calculez le groupe fondamental du tore  $T^n$  pour  $n \geq 1$ .

**Exercice 3. (Groupe fondamental des groupes topologiques)**

Un *groupe topologique* est un groupe  $G$  muni d'une topologie telle que la multiplication  $G \times G \rightarrow G$ ,  $(g_1, g_2) \mapsto g_1 g_2$ , et l'inverse  $G \rightarrow G$ ,  $g \mapsto g^{-1}$ , sont des applications continues.

**a.** (Principe d'Eckmann-Hilton.)

Soit  $M$  un ensemble muni de deux produits, i.e., deux applications  $*$ :  $M \times M \rightarrow M$  et  $\circ$ :  $M \times M \rightarrow M$ , admettant une unité commune  $1 \in M$  et vérifiant pour tous  $a, b, c \in M$ :

$$(a * b) \circ (c * d) = (a \circ c) * (b \circ d).$$

Montrez que les produits  $*$  et  $\circ$  sont égaux et que  $*$  =  $\circ$  est associatif et commutatif.

**b.** Montrez que le groupe fondamental  $\pi_1(G, 1)$  d'un groupe topologique  $G$  est commutatif.

**Exercice 4. (Degré d'une application  $f: S^1 \rightarrow S^1$ )**

Dans le cours on a défini le degré d'un lacet  $\gamma: I \rightarrow S^1$  basé en 1, ou de façon équivalente, d'une application  $f: S^1 \rightarrow S^1$  telle que  $f(1) = 1$ . Dans cet exercice, on étudie la notion plus générale de degré d'une application continue  $f: S^1 \rightarrow S^1$  quelconque. (On identifiera  $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ .)

- Soit  $f: S^1 \rightarrow S^1$  continue. Soit  $\tilde{f}: I \rightarrow \mathbb{R}$  un relèvement de l'application  $I \rightarrow S^1$ ,  $t \mapsto f(e^{2\pi i t})$ , au travers du revêtement exponentiel  $p: \mathbb{R} \rightarrow S^1$ ,  $t \mapsto e^{2\pi i t}$ . Montrez que  $\tilde{f}(1) - \tilde{f}(0)$  est un nombre entier, qui ne dépend pas du choix du relèvement  $\tilde{f}$ . On appelle cet entier *degré de  $f$* , noté  $\deg(f)$ .
- Calculez le degré de l'application  $S^1 \rightarrow S^1$ ,  $z \mapsto z^n$ .
- Montrez que si  $f, g: S^1 \rightarrow S^1$  sont homotopes, alors  $\deg(f) = \deg(g)$ . Réciproquement, montrez que deux applications continues  $f, g: S^1 \rightarrow S^1$  de même degré sont homotopes.
- Montrez que  $\deg(g \circ f) = \deg(g) \deg(f)$ .
- On note  $(f \cdot g)(z) = f(z)g(z)$ . Montrez que  $\deg(f \cdot g) = \deg(f) + \deg(g)$ .
- Montrez que le degré d'un homéomorphisme de  $S^1$  vaut  $\pm 1$ . Donnez un homéomorphisme de degré  $-1$ . Montrez que les applications continues  $f: S^1 \rightarrow S^1$  injectives sont de degré  $\pm 1$ . Montrez que les applications continues  $f: S^1 \rightarrow S^1$  de degré non nul sont surjectives.

**Exercice 5. (Le théorème de Borsuk-Ulam)**

Le but de l'exercice est de montrer, en utilisant la théorie du degré de l'Ex. 4, que pour toute application continue  $f: S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  il existe un  $x \in S^2$  tel que  $f(-x) = f(x)$ .

- Montrez qu'on a  $\deg(g) = 0$  pour toute application continue  $g: S^1 \rightarrow S^1$  qui s'étend au disque  $D^2$ .
- Montrez que si  $g: S^1 \rightarrow S^1$  est telle que  $g(-x) = -g(x)$ , alors le degré de  $g$  est impair.
- Montrez qu'il n'existe pas d'application  $h: S^2 \rightarrow S^1$  telle que  $h(-x) = -h(x)$ .
- Conclure.