Université de Lille

2020/21 - Master 1 - Topologie algébrique

TD6 - Théorème de van Kampen

Exercice 1. (Lemme de Lebesgue)
Soit $(U_i)_{i\in I}$ un recouvrement ouvert d'un espace métrique compacte (X, d). Montrer qu'il existe un *nombre de Lebesgue* du recouvrement, c'est à dire un $\delta > 0$ tel que toute partie de X de diamètre inférieur à δ soit contenue dans l'un des ouverts U_i.
(Rappel : le *diamètre* d'une partie $A \subseteq X$ est $\mathrm{diam}(A) = \sup\{d(x, y) \mid x, y \in A\}$.)
[*Indication* : lorsque $U_i \neq X$ pour tout $i \in I$, considérer un sous-recouvrement fini $U_{i\in J}$ et la valeur minimale de l'application $f : X \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sum_{i\in J} d(x, X \smallsetminus U_i)$.]

Exercice 2. (Le petit théorème de van Kampen)
Soit X un espace topologique et U, V deux ouverts tels que $X = U \cup V$ et tels que $U \cap V$ est connexe par arcs. Soit $x \in U \cap V$.
a. Soit γ un lacet de X basé en x. À l'aide du Lemme de Lebesgue (voir Ex. 1), montrez que γ est homotope à la concaténation d'un nombre fini de lacets γ_i basés en x tels que $\gamma_i(I) \subseteq U$ ou $\gamma_i(I) \subseteq V$.
b. En déduire que si U et V sont simplement connexes, alors X est simplement connexe.
c. Application : montrer que la sphère S^n est simplement connexe si $n \geq 2$.

Exercice 3. (Une somme amalgamée triviale)
Montrer que la somme amalgamée $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) *_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ au-dessus de $\mathbb{Z}$ le long des projections canoniques $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ est le groupe trivial.

Exercice 4. (Sommes amalgamées faciles)
Soient $\psi_1 : K \to G_1$ et $\psi_2 : K \to G_2$ deux morphismes de groupes de même source. Donner une description plus simple de la somme amalgamée $G_1 *_K G_2$ dans les cas spéciaux suivants :
a. Lorsque le groupe G_1 est trivial : $G_1 = \{1\}$.
b. Lorsque le morphisme ψ_1 est trivial : $\psi_1(k) = 1$ pour tout $k \in K$.
c. Lorsque ψ_1 est un isomorphisme.
[*Idée* : montrer que le morphisme canonique $\overline{\iota_1} : G_2 \to G_1 *_K G_2$ est un isomorphisme.]

Exercice 5. (Groupe fondamental d'une variété épointée)
Soit X une variété topologique de dimension $n \geq 3$ et soit $x \in X$ un point quelconque. Montrer que l'inclusion $X \smallsetminus \{x\} \hookrightarrow X$ induit un isomorphisme au niveaux des groupes fondamentaux. Et si $n \leq 2$?
[*Indication* : On pourra par exemple utiliser le théorème de van Kampen et les Ex. 2.c et 4.c.].

Exercice 6. (Présentations différentes du même groupe)
Montrer que les groupes $G = \langle s, t \mid s^{-1}tst \rangle$ et $H = \langle a, b \mid a^2b^2 \rangle$ sont isomorphes.
[*Indication* : utiliser la propriété universelle des deux présentations pour les comparer.].