TD7 - Homologie

Exercice 1. (Suites exactes courtes scindées)
Soit $0 \to A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \to 0$ une suite exacte courte d'espaces vectoriels sur un corps $\mathbb{K}$.
a. Montrer qu'il existe un morphisme $\gamma\colon C \to B$ tel que $\beta \circ \gamma = \mathrm{Id}_C$ (on dit que γ est une *section* de β).
b. Montrer ensuite que la formule $\delta = \mathrm{Id}_B - \gamma \circ \beta$ définit un morphisme $\delta\colon B \to A$ tel que $\delta \circ \alpha = \mathrm{Id}_A$.
c. En déduire l'existence d'un isomorphisme $B \cong A \oplus C$ d'espaces vectoriels.
d. Montrer que les résultats ci-dessus sont aussi valables pour une suite exacte courte de groupes abéliens, sous la condition que le groupe C soit isomorphe à $\mathbb{Z}^n$.
e. Montrer que la suite courte exacte $0 \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \xrightarrow{\alpha} \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \xrightarrow{\beta} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to 0$, où α est la multiplication par 2 et β l'application quotient, n'est pas scindée, au sens que β n'admet aucune section γ comme dans **a**.

Exercice 2. (Homologie d'un bouquet)
Montrer que si X et Y sont deux espaces bien pointés, l'homologie du bouquet $X \vee Y$ est donnée par $H_k(X \vee Y) \cong H_k(X) \oplus H_k(Y)$ pour tout $k \geq 1$. Et pour $k = 0$?
[*Indication* : même idée que pour $\pi_1(X \vee X)$, en utilisant Mayer-Vietors à la place de van Kampen.]

Exercice 3. (Le théorème du point fixe de Brouwer)
Montrer que toute application continue $f\colon D^n \to D^n$ d'un disque dans lui-même admet un point fixe.
[*Indication* : traiter les cas $n = 0, 1$ séparément ; pour $n \geq 2$, adapter la preuve du cas $n = 2$, en remplaçant π_1 par un groupe d'homologie.]

Exercice 4. (Le complexe singulier)
À partir des définitions du cours (voir Ch. III §4), vérifier que le complexe singulier $(S_k(X), d_k)_{k\geq 0}$ de tout espace topologique X est un complexe de chaînes, c'est à dire que la composée de deux applications bord successives est toujours zéro : $d_k \circ d_{k+1} = 0$.

Exercice 5. (Le théorème de Hurewicz)
Soit X un espace topologique connexe par arcs et $x_0 \in X$ un point base choisi. Nous allons montrer qu'il existe un isomorphisme $H_1(X) \cong \pi_1(X, x_0)_{\mathrm{ab}}$ entre le premier groupe d'homologie de X et l'abélianisé de son groupe fondamental. (L'*abélianisé* G_{ab} d'un groupe G est le quotient $G := G/N(\{ghg^{-1}h^{-1} \mid g, h \in G\})$, c'est à dire le plus gros groupe quotient de G qui soit abélien.) Plus précisément :
Identifions $H_1(X)$ au groupe d'homologie singulière $H_1(X) = \mathrm{Ker}(d_1)/\mathrm{Im}(d_2)$, et soit $\varpi\colon \Delta^1 \xrightarrow{\sim} I$ l'homéomorphisme $(t_0, t_1) \mapsto t_1$ entre le 1-simplexe standard $\Delta^1 = \{(t_0, t_1) \in \mathbb{R}^2 \mid t_0 + t_1 = 1, t_i \geq 0\}$ et $I = [0, 1]$. À tout chemin $\gamma\colon I \to X$ on associe le 1-simplexe singulier $h(\gamma) := \gamma \circ \varpi\colon \Delta^1 \to X$.
a. Montrer que si γ est un lacet de X (au point base choisi $x_0 \in X$) alors $h(\gamma)$ est un 1-cycle.
b. Montrer que si deux lacets γ_1 et γ_2 sont homotopes alors $h(\gamma_1)$ et $h(\gamma_2)$ sont *homologues* (c'est à dire que leur différence est un bord).
c. Montrer que cela induit un morphisme de groupes

$$\overline{h}\colon \pi_1(X, x_0)_{\mathrm{ab}} \to H_1(X)\,.$$

d. Pour tout point $x \in X$, choisir un chemin $\gamma_x\colon x_0 \rightsquigarrow x$ dans X. À chaque 1-simplexe singulier $\sigma\colon \Delta^1 \to X$ on associe alors le lacet $\ell(\sigma)$ de X basé en x_0 défini par la concaténation de chemins

$$\ell(\sigma) := \gamma_{\sigma(1,0)} \cdot (\sigma \circ \varpi^{-1}) \cdot \gamma_{\sigma(0,1)}^{-1}\,.$$

En étendant par linéarité l'application $\sigma \mapsto [\ell(\sigma)]$, on obtient un morphisme de groupes $S_1(X) \to \pi_0(X, x_0)_{\mathrm{ab}}$. Montrer que ce morphisme induit un morphisme de groupes

$$\overline{\ell}\colon H_1(X) \to \pi_0(X, x_0)_{\mathrm{ab}}\,.$$

e. Conclure la preuve du théorème, en montrant que $\overline{\ell}$ et $\overline{h}$ sont inverses l'un de l'autre.
[*Indication* : montrer que si σ est un 1-simplexe singulier de X alors la classe d'homologie de $h(\ell(\sigma))$ est représentée par le cycle $\sigma + \gamma_{\sigma(1,0)} \circ \varpi - \gamma_{\sigma(0,1)} \circ \varpi$.]