2021/22 - Master 1 - Topologie algébrique

Examen partiel du 24 février 2022

Consignes : pas de document, pas de téléphone, tous les mobiles rangés.
Durée : 2h.

Exercice 1. (Question de cours)
a. Qu'est-ce que la *espace connexe* ?
b. Qu'est-ce que la *topologie produit* ?

Exercice 2. (Vrai ou faux)
Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses, en justifiant votre réponse par une courte preuve ou un contre-exemple selon le cas :
a. Tout espace métrique est un espace topologique séparé.
b. Toute bijection continue est un homéomorphisme.
c. Tout quotient d'un espace topologique discret est un espace topologique discret.
d. Les deux espaces $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ (avec la topologie induite de $\mathbb{R}$) sont homéomorphes.
e. Les espaces $\mathbb{R}$ et $[0,1[$ sont homéomorphes.
f. Les espaces $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ et S^1 sont homéomorphes.
g. Le carré $[0,1] \times [0,1]$ est connexe par arcs.

Exercice 3. (Suspension des sphères)
La *suspension* $\Sigma(X)$ d'un espace topologique X est l'espace topologique quotient

$$\Sigma(X) = (X \times [0,1])/\sim$$

où $\sim$ est la relation d'équivalence sur le produit $X \times [0,1]$ qui identifie $(x,0) \sim (y,0)$ et $(x,1) \sim (y,1)$ pour tout $x, y \in X$. Montrer que $\Sigma(S^n)$ est homéomorphe à S^{n+1} pour tout $n \geq 0$.
[*Indication :* considérer l'application $S^n \times [0,1] \to S^{n+1} \subset \mathbb{R}^{n+2} = \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}$, $(x,t) \mapsto (\sin(\pi t)x, \cos(\pi t))$.]