

Exercice 1.

Soit X un ensemble. Vérifier que l'ensemble vide et les complémentaires des parties finies de X forment une topologie sur X , appelée *topologie cofinie*.

Exercice 2.

Vérifier que la famille de parties $\{ [0, 2] \} \cup \{ [0, x[: x \in [0, 2] \}$ définit une topologie sur l'intervalle $[0, 2]$. On l'appellera la *topologie bizarre* sur $[0, 2]$ et on l'utilisera occasionnellement en contre-exemple pour certaines propriétés.

Exercice 3. (Topologie engendrée)

Soient X un ensemble et \mathcal{B} un ensemble de parties de X .

- Montrer qu'il existe une plus petite (au sens de l'inclusion) topologie sur X contenant \mathcal{B} , appelée la *topologie engendrée par \mathcal{B}* .
- Montrer qu'une partie de X est ouverte pour la topologie engendrée par \mathcal{B} si et seulement si elle est une union (quelconque) d'intersections finies d'éléments de \mathcal{B} (en convenant ici que l'intersection indexée par l'ensemble vide est X).
- Soient X, Y deux espaces topologiques et \mathcal{B} un ensemble de parties de Y qui engendrent la topologie de Y . Montrer qu'une application $f: X \rightarrow Y$ est continue si et seulement si $f^{-1}(B)$ est un ouvert de X pour tout $B \in \mathcal{B}$.

Exercice 4. (Topologie produit)

Soient X et Y deux espaces topologiques. On munit $X \times Y$ de la *topologie produit*, c'est-à-dire de la topologie engendrée par la famille des "pavés ouverts" $\mathcal{B} = \{U \times V \mid U \text{ ouvert de } X, V \text{ ouvert de } Y\}$.

- Rappelons qu'une application $f: Z \rightarrow X \times Y$, où Z est un espace topologique, est continue si et seulement si les deux applications $p_X \circ f: Z \rightarrow X$ et $p_Y \circ f: Z \rightarrow Y$ sont continues, où $p_X: X \times Y \rightarrow X$ et $p_Y: X \times Y \rightarrow Y$ sont les projections. Montrer que si $f_1: X_1 \rightarrow Y_1$ et $f_2: X_2 \rightarrow Y_2$ sont continues, alors l'application $f_1 \times f_2: X_1 \times X_2 \rightarrow Y_1 \times Y_2$ définie par $(f_1 \times f_2)(x_1, x_2) := (f_1(x_1), f_2(x_2))$ est continue.
- Il est faux de conjecturer qu'une application $f: X \times Y \rightarrow Z$ est continue si elle est continue en chaque variable séparément ! En effet, vérifier que si f est continue alors ses *applications partielles* $f_a: Y \rightarrow Z$ et $f^b: X \rightarrow Z$ définies par $f_a(y) := f(a, y)$ et $f^b(x) := f(x, b)$ sont continues pour tout $a \in X$ et tout $b \in Y$, mais que la réciproque est fautive. (*Indication*: on pourra considérer l'application $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par $f(0, 0) = 0$ et $f(x, y) = xy/(x^2 + y^2)$ pour $(x, y) \neq (0, 0)$.)

Exercice 5. (Topologie induite)

- Soient X un espace topologique, ayant \mathcal{O}_X pour topologie, et A est une partie de X . Vérifier que

$$\mathcal{O}_{X|A} := \{U \cap A \mid U \in \mathcal{O}_X\}$$

est une topologie sur A , appelée *topologie induite* sur A par X . Un *sous-espace topologique* de X est une partie de X munie de la topologie induite par X .

- Soient X, Y des espaces topologiques, A un sous-espace topologique de X et B un sous-espace topologique de Y . Montrer que la topologie produit sur $A \times B$ coïncide avec la topologie induite sur $A \times B$ par $X \times Y$.
- La *boucle d'oreille hawaïenne* est l'union $C = \bigcup_{n \geq 1} C_n$ des cercles C_n de centre $(1/n, 0)$ et de rayon $1/n$. On munit C de la topologie induite par \mathbb{R}^2 . Montrer que l'application $f: C \rightarrow C$, définie par $f(x, y) = (nx, ny)$ pour $(x, y) \in C_n$, n'est pas continue.

Exercice 6. (La projection stéréographique)

Soit $N := (0, \dots, 0, 1)$ le pôle nord de la sphère $S^n = \{x = (x_1, \dots, x_{n+1}) \mid \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$. La *projection stéréographique* (de pôle N) est l'application $p: S^n \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^n$ qui associe à tout point $x \in S^n \setminus \{N\}$ l'unique point $p(x)$ de \mathbb{R}^n tel que les trois points N , x et $p(x)$ soient alignés dans \mathbb{R}^{n+1} .

- a.** Faire un dessin illustrant la situation pour $n = 1$ et $n = 2$.
- b.** Calculer les coordonnées de $p(x)$ (pour un n quelconque).
- c.** Montrer que p est un homéomorphisme $S^n \setminus \{N\} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n$.