2021/22 - Master 1 - Topologie algébrique

TD3 - Espaces quotients et variétés

Exercice 1. (Cônes d'espaces topologiques)
Le *cône* d'un espace topologique X est l'espace quotient $C(X) = (X \times [0,1])/(X \times \{0\})$.
Montrer que $C(S^{n-1}) \cong D^n$.

Exercice 2. (La droite de Hausdorff)
Soit $X := ((\mathbb{R} \times \{1\}) \cup (\mathbb{R} \times \{2\}))/\!\sim$ l'espace quotient obtenu en recollant deux droites euclidiennes le long des identifications $(r, 1) \sim (r, 2)$ pour tout $r \neq 0$.
a. Vérifier que X n'est pas séparé donc n'ést pas une variété topologique.
b. Démontrer que, néanmoins, X est localement homéomorphe à $\mathbb{R}$ (en *tout* point !).

Exercice 3. (Un quotient sauvage)
On considère l'action de $\mathbb{Q}$ sur $\mathbb{R}$ par translation.
a. Montrer que chaque point de $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ est contenu dans chaque voisinage ouvert de chaque autre point !
b. En déduire que $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ n'est pas séparé.
c. En déduire aussi qu'*aucun* point de $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ n'admet un voisinage homéomorphe à $\mathbb{R}^n$, pour aucun n.

Exercice 4. (Les tores comme quotient d'une action)
Pour $n \geq 1$, considérons le groupe $\mathbb{Z}^n$ agissant sur $\mathbb{R}^n$ par translation : $nx = n + x$.
a. Vérifier que $\mathbb{Z}^n$ agit librement et par homéomorphismes sur $\mathbb{R}^n$.
b. Démontrer que cette action est propre (voir Ch.I §5.d du cours). En déduire par les résultats du cours que l'espace quotient $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ est une variété topologique de dimension n.
c. Vérifier que le n-cube $[0,1]^n$ est un domaine fondamentale pour l'action (voir Ch.I §5 p.10). En déduire que $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n \cong [0,1]^n/\!\sim$ pour une relation d'équivalence sur la frontière $\partial([0,1]^n)$.
d. Démontrer que l'espace quotient est homéomorphe au n-tore : $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n \cong (S^1)^n$.

Exercice 5. (Une action non propre)
Démontrer que l'action du groupe $\mathbb{Z}$ sur l'espace $\mathbb{R}$ définie par $nx := 2^n x$ n'est pas propre.

Exercice 6. (Espaces projectifs complexes)
On rappelle que l'*espace projectif complexe de dimension* $n \geq 1$ est l'ensemble des droites vectorielles dans $\mathbb{C}^{n+1}$ muni de la topologie quotient associée à la surjection $\pi\colon \mathbb{C}^{n+1} \smallsetminus \{0\} \to \mathbb{C}P^n$, $z \mapsto \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}(z)$.
a. Montrer que $\mathbb{C}P^n$ est séparé.
b. On identifie S^{2n+1} et $\{z = (z_0, \ldots z_n) \mid |z_0|^2 + \ldots + |z_n|^2 = 1\}$, la sphère unité de $\mathbb{C}^{n+1}$. On fait agir le groupe $\mathrm{U}(1) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ des complexes de module 1 sur S^{2n+1} par multiplication scalaire. Montrer que $\mathbb{C}P^n \cong S^{2n+1}/\mathrm{U}(1)$.
c. Démontrer que $\mathbb{C}P^n$ est compact, connexe et connexe par arcs.
d. De façon similaire, démontrer que $\mathbb{C}P^n \cong (\mathbb{C}^{n+1} \smallsetminus \{0\})/\mathbb{C}^*$, où on fait agir le groupe multiplicatif $\mathbb{C}^*$ sur $\mathbb{C}^{n+1} \smallsetminus \{0\}$ par multiplication scalaire.
e. Démontrer que $\mathbb{C}P^1 \smallsetminus \{x\} \cong \mathbb{R}^2$, où x est un point fixé quelconque. À l'aide de la compactification d'Alexandroff (Exo 13 du TD2), en déduire que $\mathbb{C}P^1 \cong S^2$. En déduire que $S^3/\mathrm{U}(1) \cong S^2$.
(*Indication :* comparer avec le cas analogue de $\mathbb{R}P^n$ traité dans le cours.)