

**Exercice 1. (Présentations des groupes cycliques)**

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , trouver un isomorphisme  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \langle g \mid g^n \rangle$ .

(Combien y a-t-il de tels isomorphismes ?)

**Exercice 2. (Deux présentations du même groupe)**

Montrer que les groupes  $G = \langle s, t \mid s^{-1}tst \rangle$  et  $H = \langle a, b \mid a^2b^2 \rangle$  sont isomorphes.

[Indication : utiliser les propriétés universelles des deux présentations.]

**Exercice 3. (Un exemple géométrique)**

Soit  $G$  le sous-groupe d'isométries de  $\mathbb{R}^2$  engendré par  $t$  et  $s$ , définies par :

$$t(x, y) = (x + 1, y) \quad \text{et} \quad s(x, y) = (-x, y + 1) \quad \text{pour tout } (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Montrer que  $G$  admet la présentation  $G \cong \langle g_s, g_t \mid g_s^{-1}g_tg_sg_t \rangle$ .

**Exercice 4. (Une somme amalgamée triviale)**

Montrer que la somme amalgamée  $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) *_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$  de  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  et  $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$  au-dessus de  $\mathbb{Z}$  le long des projections canoniques  $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  et  $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$  est le groupe trivial.

**Exercice 5. (Sommages amalgamés faciles)**

Soient  $\psi_1 : K \rightarrow G_1$  et  $\psi_2 : K \rightarrow G_2$  deux morphismes de groupes de même source  $K$ .

Donner une description plus simple de la somme amalgamée  $G_1 *_K G_2$  dans les cas spéciaux suivants :

- Lorsque le groupe  $G_1$  est trivial :  $G_1 = \{1\}$ .
- Lorsque le morphisme  $\psi_1$  est trivial :  $\psi_1(k) = 1$  pour tout  $k \in K$ .
- Lorsque  $\psi_1$  est un isomorphisme.

[Idée : montrer que le morphisme canonique  $\bar{\psi}_1 : G_2 \rightarrow G_1 *_K G_2$  est un isomorphisme.]

**Exercice 6. (Somme amalgamée de deux présentations)**

Soient  $G_1 = \langle \mathcal{G}_1 \mid \mathcal{R}_1 \rangle$  et  $G_2 = \langle \mathcal{G}_2 \mid \mathcal{R}_2 \rangle$  deux groupes présentés par générateurs et relations.

Soit  $K = \langle \mathcal{K} \mid \mathcal{S} \rangle$  un autre tel groupe, et soient  $\psi_i : K \rightarrow G_i$  deux morphismes ( $i = 1, 2$ ).

- Trouver une présentation du produit libre  $G_1 * G_2$ .
- Trouver une présentation de la somme amalgamée  $G_1 *_K G_2$ .