

Exercice 1. (Présentations des groupes cycliques)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, trouver un isomorphisme $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \langle g \mid g^n \rangle$.

(Combien y a-t-il de tels isomorphismes ?)

Exercice 2. (Deux présentations du même groupe)

Montrer que les groupes $G = \langle s, t \mid s^{-1}tst \rangle$ et $H = \langle a, b \mid a^2b^2 \rangle$ sont isomorphes.

[*Indication* : utiliser les propriétés universelles des deux présentations.]

Exercice 3. (Un exemple géométrique)

Soit G le sous-groupe d'isométries de \mathbb{R}^2 engendré par t et s , définies par :

$$t(x, y) = (x + 1, y) \quad \text{et} \quad s(x, y) = (-x, y + 1) \quad \text{pour tout } (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Montrer que G admet la présentation $G \cong \langle g_s, g_t \mid g_s^{-1}g_tg_s g_t \rangle$.

Exercice 4. (Une somme amalgamée triviale)

Montrer que la somme amalgamée $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) *_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ au-dessus de \mathbb{Z} le long des projections canoniques $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ est le groupe trivial.

Exercice 5. (Sommés amalgamés faciles)

Soient $\psi_1 : K \rightarrow G_1$ et $\psi_2 : K \rightarrow G_2$ deux morphismes de groupes de même source K .

Donner une description plus simple de la somme amalgamée $G_1 *_K G_2$ dans les cas spéciaux suivants :

- Lorsque le groupe G_1 est trivial : $G_1 = \{1\}$.
- Lorsque le morphisme ψ_1 est trivial : $\psi_1(k) = 1$ pour tout $k \in K$.
- Lorsque ψ_1 est un isomorphisme.

[*Idée* : montrer que le morphisme canonique $\bar{\psi}_1 : G_2 \rightarrow G_1 *_K G_2$ est un isomorphisme.]

Exercice 6. (Somme amalgamée de deux présentations)

Soient $G_1 = \langle \mathcal{G}_1 \mid \mathcal{R}_1 \rangle$ et $G_2 = \langle \mathcal{G}_2 \mid \mathcal{R}_2 \rangle$ deux groupes présentés par générateurs et relations.

Soit $K = \langle \mathcal{K} \mid \mathcal{S} \rangle$ un autre tel groupe, et soient $\psi_i : K \rightarrow G_i$ deux morphismes ($i = 1, 2$).

- Trouver une présentation du produit libre $G_1 * G_2$.
- Trouver une présentation de la somme amalgamée $G_1 *_K G_2$.