Université de Lille

2021/22 - Master 1 - Topologie algébrique

TD6 - Groupe fondamental

Exercice 1. (Composantes connexes et groupe fondamental)
Soient X un espace topologique et $x_0 \in X$. Notons C la composante connexe par arcs de x_0.
Montrer que l'inclusion $i\colon C \hookrightarrow X$ induit un isomorphisme de groupes $\pi_1(C, x_0) \xrightarrow{\sim} \pi_0(X, x_0)$.

Exercice 2. (Groupe fundamental d'un produit)
Soient X, Y deux espaces topologiques, $x_0 \in X$ et $y_0 \in Y$ deux points.
a. Montrez qu'il existe un isomorphisme de groupes $\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \cong \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$.
b. Montrez que le produit $X \times Y$ est simplement connexe si et seulement si ses facteurs X, Y le sont.
c. Calculez le groupe fondamental du tore T^n pour $n \geq 1$.

Exercice 3. (Groupe fondamental des groupes topologiques)
Un *groupe topologique* est un groupe G muni d'une topologie telle que la multiplication $G \times G \to G$, $(g_1, g_2) \mapsto g_1 g_2$, et l'inverse $G \to G$, $g \mapsto g^{-1}$, sont des applications continues.
a. (*Principe d'Eckmann-Hilton.*)
Soit M un ensemble muni de deux produits, i.e., deux applications $*\colon M \times M \to M$ et $\circ\colon M \times M \to M$, admettant une unité commune $1 \in M$ et vérifiant pour tous $a, b, c \in M$:

$$(a * b) \circ (c * d) = (a \circ c) * (b \circ d).$$

Montrez que les produits $*$ et $\circ$ sont égaux et que $* = \circ$ est associatif et commutatif.
b. Montrez que le groupe fondamental $\pi_1(G, 1)$ d'un groupe topologique G est commutatif.

Exercice 4. (Degré d'une application $f\colon S^1 \to S^1$)
Dans le cours on a défini le degré d'un lacet $\gamma\colon I \to S^1$ basé en 1, ou de façon équivalente, d'une application $f\colon S^1 \to S^1$ telle que $f(1) = 1$. Dans cet exercice, on étudie la notion plus générale de degré d'une application continue $f\colon S^1 \to S^1$ quelconque. (On identifiera $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$.)
a. Soit $f\colon S^1 \to S^1$ continue. Soit $\widetilde{f}\colon I \to \mathbb{R}$ un relèvement de l'application $I \to S^1$, $t \mapsto f(e^{2i\pi t})$, au travers du revètement exponentiel $p\colon \mathbb{R} \to S^1$, $t \mapsto e^{2i\pi t}$. Montrez que $\widetilde{f}(1) - \widetilde{f}(0)$ est un nombre entier, qui ne dépend pas du choix du relèvement $\widetilde{f}$. On appelle cet entier *degré de* f, noté $\deg(f)$.
b. Calculez le degré de l'application $S^1 \to S^1$, $z \mapsto z^n$.
c. Montrez que si $f, g\colon S^1 \to S^1$ sont homotopes, alors $\deg(f) = \deg(g)$. Réciproquement, montrez que deux applications continues $f, g\colon S^1 \to S^1$ de même degré sont homotopes.
d. Montrez que $\deg(g \circ f) = \deg(g)\deg(f)$.
e. On note $(f \cdot g)(z) := f(z)g(z)$. Montrez que $\deg(f \cdot g) = \deg(f) + \deg(g)$.
f. Montrez que le degré d'un homéomorphisme de S^1 vaut ± 1. Donnez un homéomorphisme de degré -1. Montrez que les applications continues $f\colon S^1 \to S^1$ injectives sont de degré ± 1. Montrez que les applications continues $f\colon S^1 \to S^1$ de degré non nul sont surjectives.

Exercice 5. (Le théorème de Borsuk-Ulam)
Le but de l'exercice est de montrer, en utilisant la théorie du degré de l'Ex. 4, que pour toute application continue $f\colon S^2 \to \mathbb{R}^2$ il existe un $x \in S^2$ tel que $f(-x) = f(x)$.
a. Montrez qu'on a $\deg(g) = 0$ pour toute application continue $g\colon S^1 \to S^1$ qui s'étend au disque D^2.
b. Montrez que si $g\colon S^1 \to S^1$ est telle que $g(-x) = -g(x)$, alors le degré de g est impair.
c. Montrez qu'il n'existe pas d'application $h\colon S^2 \to S^1$ telle que $h(-x) = -h(x)$.
d. Conclure.