2021/22 - Master 1 - Topologie algébrique

TD7 - Théorème de van Kampen

Exercice 1. (Lemme de Lebesgue)
Soit $(U_i)_{i\in I}$ un recouvrement ouvert d'un espace métrique compacte (X,d). Montrer qu'il existe un *nombre de Lebesgue* du recouvrement, c'est à dire un $\delta > 0$ tel que toute partie de X de diamètre inférieur à δ soit contenue dans l'un des ouverts U_i.
(Rappel : le *diamètre* d'une partie $A \subseteq X$ est $\mathrm{diam}(A) = \sup\{d(x,y) \mid x,y \in A\}$.)
[*Indication* : lorsque $U_i \neq X$ pour tout $i \in I$, considérer un sous-recouvrement fini $U_{i\in J}$ et la valeur minimale de l'application $f\colon X \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sum_{i\in J} d(x, X \setminus U_i)$.]

Exercice 2. (Le petit théorème de van Kampen)
Soit X un espace topologique et U, V deux ouverts tels que $X = U \cup V$ et tels que $U \cap V$ est connexe par arcs. Soit $x \in U \cap V$.

a. Soit γ un lacet de X basé en x. À l'aide du Lemme de Lebesgue (voir Ex. 1), montrez que γ est homotope à la concaténation d'un nombre fini de lacets γ_i basés en x tels que $\gamma_i(I) \subseteq U$ ou $\gamma_i(I) \subseteq V$.

b. En déduire que si U et V sont simplement connexes, alors X est simplement connexe.

Exercice 3. (Simple connexité des sphères supérieures)
Montrer que la sphère S^n est simplement connexe pour $n \geq 2$.
[*Indication* : Appliquer l'Ex. 2 à la décomposition $S^n = (S^n \setminus \{\text{pôle nord}\}) \cup (S^n \setminus \{\text{pôle sud}\})$.]

Exercice 4. (Groupe fondamental de la bouteille de Klein)
Calculer le groupe fondamental de la bouteille de Klein :

$$K = \frac{[0,1] \times [0,1]}{(x,0) \sim (x,1) \;\text{ et }\; (0,y) \sim (1, 1-y)}$$

[*Indication* : Déterminer une présentation du groupe fondamental de K à l'aide du théorème de van Kampen, pour un recouvrement ouvert $K = U_1 \cup U_2$ tel que U_1 est contractile et U_2 se retracte par déformation sur l'image dans K du périmètre $\{(x,y) \in [0,1]^2 \mid x \in \{0,1\} \text{ ou } y \in \{0,1\}\}$.]